位相空間論

橋爪大三郎

以下では，位相に関する最も基本的な諸概念と定理とを扱う。内容は，Kelley［1955］の第1章とほぼ対応しているので，同時にそちらを参照されたい。なお 集合 および 集合族 に関する理論が前提され，既知と考えられている。

位相，近傍

位相空間の公理系は，かならずしも，唯一つに限られているわけではない。互いに同等な，いくつかの方式が試みられている。たとえば，入江［1957］は，近傍公理 を満たす空間をもって，位相空間と定義し，Kuratowski は，閉包公理を考え，閉包作用素にともなう位相を定義している。ここで紹介する，Kelley による体系化は，両者のいずれとも異なる，開集合公準 を公理に採用するものである。

N.B. 入江［1957］と Kelley［1955＝1968］とは，単に，用いてある公理系が違うばかりではなく，論点の抽象化の程度においても，大いに異っている。入江は，教育的配慮から，議論を，距離空間（ないしユークリッド空間）に，限定している。それは，入江が近傍を定義するのに，距離を定義した上で，ε-近傍をもっていることをみるだけでも，明らかであろう。しかしながら，位相空間は，距離空間を含み，後者を一般化したものであって，位相概念にとって距離は本質的でない。そこで，たとえ日常的感覚との結びつきが多少薄くなろうとも，議論をさらに抽象化して，Kelley のようなアプローチを採る必要がある，といえるのである。

位相空間論とは，ひと口で言うならば，ある要素（点）の無数のあつまりからなる集合（空間）のなかで考えられる，ある一連の部分集合のあつまり（集合族）が，どのような性質を空間に与えるのか，を考察しようとする議論である。そこで，ある集合族 $\mathcal{T}$ を考え，演算 $\cup$（和をとる），$\cap$（共通部分をとる），のふたつに関して，閉じている，とする。

$$(1)\quad {}^{\forall}U_1, {}^{\forall}U_2 \in \mathcal{T} \longrightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$$

$$(2)\quad {}^{\forall}U_i \in \mathcal{T}\ (i=1,\cdots,n,\cdots)$$
$$\longrightarrow U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n \cup \cdots \in \mathcal{T}$$

このふたつの性質は，開集合のもっとも基本的な性質を抽象したものであって，開集合公準とよばれるが，ここでは逆に，(1)，(2)を公理として要請した上で，集合族 $\mathcal{T}$ の要素を，開集合 であると定義してしまうのである。

N.B. (1)，(2)について註釈を追加するならば，$\mathcal{T}$ は，演算 $\cup$ に関しては，それが無限個の集合の間でも，（たとえ，可算でなくてさえも）閉じているのに対し，(1)の示すように，演算 $\cap$ に関しては，任意のふたつの（それゆえ，任意の有限個の）集合のあいだでしか，とじていないことをいっている。（Q1 なぜ無限の場合をみとめるとまずいのか，反例をあげて考えよ。）

$\mathcal{T}$ に属するあらゆる集合の和をとって，X とおけば，$X=\bigcup\{U : U \in \mathcal{T}\}$ もまた $\mathcal{T}$ の要素である（(2)）。$\mathcal{T}$ の要素はいずれも X の部分集合になっているから，X を全体空間とよんでもいいだろう。そこで，つぎのようにいう：

(3) $(X, \mathcal{T})$：位相空間

(4) $X=\bigcup\{U : U \in \mathcal{T}\}$：位相 $\mathcal{T}$ をもつ空間，あるいは，位相 $\mathcal{T}$ の台

(5) $\mathcal{T}$：X の位相（Topology）

位相空間というのは，集合であるが，単なる集合なのではなくて，集合 X とその上での集合族 $\mathcal{T}$ との 対 として，定義されている。$\mathcal{T}$ は，いってみれば，点のあつまりである X のなかに，いかなる点相互の関係があるのか，を示しているわけである。（そこで当然，同じ要素からなる空間でも，位相のとり方が異なれば，全く別の性質を示すかもしれない，といえる。） 位相空間論は，こうして，集合論と集合族論との上に成立っているから，以下では，個々の記号が，集合を示すのか集合族を示すのかをそのつど確認していく必要があるだろう。おおむね，要素は小文字で，集合は大文字で，集合族は筆記体の大文字で，示される。

つぎに，開集合を，要素語として導入しよう。開集合とは，(1),(2)をみたすような位相(topology) $\mathcal{T}$ の要素，をいう。位相をいくつも考えるときには，これを，ある集合が $\mathcal{T}$ に関して開集合である（あるいは，単に，$\mathcal{T}$−開集合である）という。というのは，同じ点からなる集合であっても，位相のとり方によって，開集合であったり，そうでなかったり，することがあるからである。

*

同じ空間 X についても，いろいろの位相を考えることができる。位相のなかでもっとも小さいものは，分離しない位相空間とよばれる空間の位相で，$\mathcal{T}_u=\{\emptyset, X\}$ によって与えられる。（Q2. $\mathcal{T}_u$ が位相であることをたしかめよ）これに対して，Xのあらゆる部分集合を位相 $\mathcal{T}_d$ とすれば，それは，Xの位相のなかで最大である。（Q3. $\mathcal{T}_d$ が位相であることを，たしかめよ）$\mathcal{T}_d$ を，離散位相という。Xの位相は，どれをとっても，$\mathcal{T}_d$ の部分族になっている。Xの位相は，どれも，$\mathcal{T}_d$ に含まれ，その一方で，$\mathcal{T}_u$ を含んでいる。

Xの位相に，$\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ とがあったとして，$\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$ が成立つとする。このとき，$\mathcal{T}_1$ は $\mathcal{T}_2$ より，小さいとか粗いとかいい，$\mathcal{T}_2$ は $\mathcal{T}_1$ より大きいとか細かいとかいう。$\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$ でも $\mathcal{T}_1\supset\mathcal{T}_2$ でもないとき，$\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ とは比較できない，という。

*

さて，位相空間の最も重要な分析概念である近傍(neighborhood)を，ここでいよいよ定義することにしよう。空間Xの部分集合であって，点xを含むある開集合（$\mathcal{T}$−開集合）を含むものを，点xの近傍（$\mathcal{T}$−近傍）という。すなわち，

(6) Def. $U(x)$ が x の近傍である

$$\Longleftrightarrow \exists O(x) / x\in O(x)\subset U(x),\ O(x)\in\mathcal{T}.$$

この定義によれば，近傍は，いわゆる ε−近傍よりも，はるかに一般的な形で定義されている。まず，近傍それ自身は，必ずしも開集合でなくてかまわない。また，その形状も，全く任意である。また，(6)から明らかなように，任意の開集合は，その各点の近傍になっており，任意の近傍は，あ

る開近傍をかならず含む。

このような近傍の概念は，位相 $\mathcal{T}$ のとり方に依存して，規定されている点に，注目しておくべきだろう。なぜなら，開集合は，位相 $\mathcal{T}$ の要素として，定義されたのだから。近傍は，位相 $\mathcal{T}$ の（空でない）要素を含んでいなければならず，その意味で，$\mathcal{T}$−近傍である，とよばれる。

N.B. 入江［1957: 56f］から，近傍公理を再録しておく：

(7) 空間 X の各要素 x に対して，X の部分集合 $U(x)$ があって ($\forall x\in X \longrightarrow \exists U(x) / U(x)\subset X$),

(i) $U(x)\ni x$

(ii) $\exists U_i(x) / U_i(x)\subset U_j(x)\cap U_k(x)$ for any j, k

(iii) $U_i(x)\ni y \longrightarrow \exists U_j(y) / U_j(y)\subset U_i(x)$

これらによっても，位相空間を定義することができる（Q4. 実際に，定義せよ）。さらに，もうひとつの命題，いわゆる，Hausdorff の分離公理を追加する場合には，えられる位相空間は Hausdorff 空間とよばれる。

(iv) $x\neq y \longrightarrow \exists U_i(x), U_j(y) / U_i(x)\cap U_j(y)=\emptyset$

(Q5. (6)による近傍の定義と，(7)とが同値であるか，いえ。)

*

開集合に関して，つぎの定理がある。

(8) Th. 集合 A が開集合である

$$\Longleftrightarrow \forall x\in A \longrightarrow \exists U(x) / U(x)\subset A$$

この定理は，位相空間（X，$\mathcal{T}$）において，Xの部分集合Aが，開集合であるための，必要十分条件を与えるものである。（近傍公理による議論では，この命題(8)が開集合の定義を与えるものなのだが，ここでは，開集合公理から出発しているので，同じ命題が定理として証明されることになる。）

（証明） 命題(8)は，ふたつの部分からなる，すなわち，集合が，その各点のある近傍を含むならば開集合であること，および，集合が開集合であるならば，その各点のある近傍を，含むこと。前半から証明してみよう。 ある集合Aが開集合であることを結論するためには，すでに開集合であることが判明している集合（たとえば V）をうまく

存こて、しかるのち、$V=A$ となることを示せればよい。そこで、A の開部分集合を O として、$V=\bigcup\{O : O\subset A\}$ としてみる。（Q6 Aに必ず開部分集合がとれると考えて、よいか？）すると、V もまた、やはり、Aの開部分集合である。（なぜなら、Vの集り方によって、$O\in\mathcal{J}$ $\longrightarrow V\in\mathcal{J}$（∵(2)），すなわち、$V$も開集合。また、$V$の要素は、いずれも Aの要素だから、VはAの部分集合である。）すなわち、$V\subset A$　(*)。一方、

$$\forall x\in A \longrightarrow \exists U(x) / U(x)\subset A \quad (\because (8)\text{の前提})$$
$$\Longrightarrow \exists O(x) / O(x)\in\mathcal{J},\ x\in O(x)\subset U(x)\subset A \quad (\because (6))$$
$$\Longrightarrow x\in V \quad (\because V=\bigcup\{O : O\subset A, O\in\mathcal{J}\})$$

であるといえるから、$V\supset A$　(**)。　(*),(**)を併せて、$V=A$。よって、$A\in\mathcal{J}$（開集合）。これで、前半の証明は了った。

後半。集合Aが開集合であるとする。そこで、Aに属する任意の x をとれば、

(i)　$x\in A$

(ii)　$x\in A\subset A$　，$A\in\mathcal{J}$

が成立している。(i),(ii)はAそれ自身が (6) にいう近傍の定義をみたしていることを、示す。すなわち、xにはAに含まれる近傍が必ずあった。∎

*

近傍系とは、ある点のすべての近傍からなる集合族である、と定義する。xの近傍系を、$\mathcal{U}(x)$と書けば、

(9)　Def.　$\mathcal{U}(x)=\{U(x)\}$

近傍系に関しては、つぎの定理がある。

(10) (i) Th.　$\forall U_1(x), \forall U_2(x)\in\mathcal{U}(x)$
$$\longrightarrow U_1(x)\cap U_2(x)\in\mathcal{U}(x)$$

(ii)　$\forall V\supset U(x),\ U(x)\in\mathcal{U}(x)\longrightarrow V\in\mathcal{U}(x)$

（証明）(i)　$U_1(x),\ U_2(x)\in\mathcal{U}(x)$
$$\longrightarrow \exists O_1(x) / x\in O_1(x)\subset U_1(x),\quad O_1(x)\in\mathcal{J}$$
$$\exists O_2(x) / x\in O_2(x)\subset U_2(x),\quad O_2(x)\in\mathcal{J} \quad (\because (6))$$
$$\longrightarrow x\in O_1(x)\cap O_2(x)\subset U_1(x)\cap U_2(x),$$
$$O_1(x)\cap O_2(x)\in\mathcal{J} \quad (\because (1))$$
$$\longrightarrow U_1(x)\cap U_2(x)\in\mathcal{U}(x) \quad (\because (6))$$

(ii)　$U(x)\subset V,\ U(x)\in\mathcal{U}(x)$
$$\longrightarrow \exists O(x) / x\in O(x)\subset U(x)\subset V,\ O(x)\in\mathcal{J} \quad (\because (6))$$
$$\longrightarrow V\in\mathcal{U}(x) \quad (\because (6))\ ∎$$

(10)-(i)より、有限個の近傍の共通部分は、また、近傍である。（Q7. 近傍系の無限個の要素の共通部分が、もとの近傍系の要素とならない場合を、考えよ）

閉集合

閉集合は、開集合と双対な概念であって、次のように定義される。位相空間 $(X,\mathcal{J})$ の部分集合 Aを考えたときに、

(11)　Def.　Aが閉集合である
$$\Longleftrightarrow X\sim A\text{が開集合である。}$$

N.B.　$X\sim A$を、AのXに関する相対補集合という。もうすこし詳しく説明するには、まず、絶対補集合から考えなければならない。Aの絶対補集合を、$\sim A$ と書くが、$\sim A=\{x : x\notin A\}$ のことである（定義）。そして、$X\sim A$とは、$X\cap\sim A$ のこと。
相対補集合に関連した定理を、Kelley [1955=1968 : 3f] から再録しておこう。

(12)　Th.　$\forall A, \forall B\subset X \Longrightarrow$

(i)　$A\subset B \rightleftarrows X\sim B\subset X\sim A$

(ii)　$A\subset B \rightleftarrows A\cap X\sim B=\emptyset$

(iii)　$A\subset B \rightleftarrows (X\sim A)\cup B=X$

(13) (i)　$X\sim(X\sim A)=A\cap X$

(ii)　$X\sim(A\cup B)=(X\sim A)\cap(X\sim B)$
$X\sim(A\cap B)=(X\sim A)\cup(X\sim B)$　}（ド・モルガン）

（Q8. (12),(13)を証明せよ）

閉集合と開集合とが背反する概念ではない点に、注意しなければならない。たとえば、位相空間 $(X,\mathcal{J})$ の位相を、分離しない位相

$\mathfrak{T}=\{\phi, X\}$ にとってみよう。 $\phi\in\mathfrak{T}$, $X\in\mathfrak{T}$ より ϕ, X はいずれも開集合である。しかるに、$\phi = X\sim X$, $X = X\sim\phi$ であるから、ϕ, X はいずれも、閉集合である（∵ (11)）。

*

閉集合の公準は、開集合の場合と双対であって、次のようにあたえられるはずである。$\mathfrak{F}$ を集合族とすれば、

(14) $\forall F_1, \forall F_2 \in \mathfrak{F} \longrightarrow F_1\cup F_2 \in \mathfrak{F}$

(15) $\forall F_i \in \mathfrak{F}$ $(i=1,\dots,n,\dots)$

$\longrightarrow F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n\cap\cdots \in \mathfrak{F}$

(Q9. (1), (2) から (14), (15) をみちびけ)

閉集合の公準をみたすような集合族 $\mathfrak{F}$ を考えるならば、$\mathfrak{F}$ の各要素の相対補集合の全体からなる集合族を位相とする空間で、$\mathfrak{F}$ が閉集合の族になることがわかる。

(16) Th. $\mathfrak{F}$ は集合族であって、

(i) $\forall F_1,\dots,\forall F_n \in \mathfrak{F} \longrightarrow F_1\cup F_2\cup\dots\cup F_n \in\mathfrak{F}$

(ii) $\forall F_i \in \mathfrak{F}$ $(i\ge 1)$

$\longrightarrow F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n\cap\cdots \in \mathfrak{F}$

(iii) $X = \bigcup\{F : F\in\mathfrak{F}\}\in\mathfrak{F}$

であるとする。そのとき、$\mathfrak{T}=\{U : U = X\sim F / F\in\mathfrak{F}\}$ なる集合族 $\mathfrak{T}$ を作って X の位相とすれば、$\mathfrak{F}$ は、X の閉集合の族である。

(証明) まず、$\mathfrak{T}$ が位相であることをいう。実際、

$\forall U_1, \forall U_2 \in \mathfrak{T}$

$\rightarrow \exists F_1, \exists F_2 / U_1 = X\sim F_1,\ U_2 = X\sim F_2 ;\ F_1, F_2\in\mathfrak{F}$

$\rightarrow F_1\cup F_2\in\mathfrak{F}$ (∵ (16) (i))

$\rightarrow X\sim(F_1\cup F_2)\in\mathfrak{T}$

$\rightarrow (X\sim F_1)\cap(X\sim F_2)\in\mathfrak{T}$ (∵ (13) (iii))

$\rightarrow U_1\cap U_2\in\mathfrak{T}$.

すなわち、(1) が成立している。同様に、(2) も成立する。（Q10. (2) が成立することを、証明せよ。） $\mathfrak{T}$ が位相であるので、$(X, \mathfrak{T})$ を、位相空間とする。すると、$\mathfrak{F}$ は、$\mathfrak{F}=\{F : F = X\sim U / U\in\mathfrak{T}\}$ であるとかける。$\mathfrak{T}$ は、この位相空間における、開集合の族である。したがって、(11) の定義より、$\mathfrak{F}$ は、この位相 $\mathfrak{T}$ のもとで、閉集合の族である。 ■

N.B. つぎの定理が、知られている。

(17) (i) $\bigcap 0 = \mathcal{U}$

(ii) $\bigcup 0 = 0$

ただし、$\mathcal{U} = \{x : x = x\}$ （普遍）である (Kelley [1955=1968:265])。

集積点

位相空間の位相 $\mathfrak{T}$ は、開集合の族であるが、さきほどの定理 (8) は、開集合を、（そして位相を）、近傍の概念を用いて、構成できることを、示している。閉集合は、開集合と双対なので、閉集合もまた、近傍の概念で定義できるはずだ。それにはまず、位相空間の部分集合の集積点を定義しておこう。

(18) Def. x が A の集積点である

$\Longleftrightarrow \forall U(x) / U(x)\in\mathcal{U}(x)$

$\longrightarrow U(x)\cap(A\sim\{x\})\neq\phi$

x が A の集積点であるときには、x のいくらでも近くに A の点が存在することになる。

位相空間の部分集合が閉集合であるための必要充分条件を、つぎの定理が与える。

(19) Th. A が閉集合である

$\Longleftrightarrow$ A が、その集積点のすべてを含む

(証明) A がその集積点をすべて含む

$\Longleftrightarrow$ $X\sim A$ には、A の集積点が含まれない

$\Longleftrightarrow \forall x\in X\sim A \longrightarrow \exists U(x)/U(x)\cap A=\phi,\ U(x)\in\mathcal{U}(x)$

$(\because x \in X \sim A$ であるから $A \sim \{x\} = A)$

$\iff \forall x \in X \sim A \longrightarrow \exists U(x) / U(x) \subset X \sim A,\ U(x) \in \mathcal{U}(x)$

$\iff X \sim A$: open

$\iff A$: closed ∎

Kelleyの証明の、以上のような改良は、恒松直幸によってもたらされたものであることを、特記しておこう。

(20) Th. $A \cup \{A$のあべての集積点$\}$ は、閉集合である。

(証明) Aのすべての集積点の集合を、A^d とおく。$\forall x\,[x \in X \sim (A \cup A^d)]$

$\Longrightarrow x \notin (A \cup A^d) \Longrightarrow \exists O_x (x \in O_x \subset U_x \in \mathcal{U}_x \wedge O_x \cap A = \phi)$ $(\because (18))$

$\Longrightarrow \forall y\,(y \in O_x) \longrightarrow \exists O_y (y \in O_y \subset O_x)$ $(\because (8)) \longrightarrow O_y \cap (A \sim \{y\}) = \phi$

$\longrightarrow y \notin A^d \Longrightarrow O_x \cap (A \cup A^d) = \phi \Longrightarrow O_x \in X \sim (A \cup A^d)$

$\Longrightarrow X \sim (A \cup A^d)$: open $\Longrightarrow A \cup A^d$: closed ∎

Aのすべての集積点の集合、A^d を、Aの導集合という。なお、(20)の証明には、直観法による、興味ある別証がある。

閉包

位相空間 $(X, \mathcal{T})$ の部分集合Aの閉包（$\mathcal{T}$-閉包）とは、Aを含むすべての閉集合の共通部分のことをいい、A^-（もしくは、$\overline{A}$）であらわす。すなわち、

(21) Def. A^-がAの閉包である

$\iff A^- = \bigcap \{F : A \subset F \in \mathfrak{F}\}$

A^-は、閉集合である $(\because (16)\text{-(ii)})$。$A^-$は、Aを含む最小の閉集合である（Q11. 証明せよ）。

閉包を、集積点を用いて規定するときに、次の定理が成立する。

(22) Th $A^- = A \cup A^d$

(証明) $A \subset A \cup A^d$: closed $(\because (20)) \Longrightarrow A^- \subset A \cup A^d$ $(\because (21))$ (*)

また、$\forall x (x \in A) \rightarrow x \in A^-$ $(\because (21)) \Longrightarrow A \subset A^-$ (☆)。$\forall x (x \in A^d) \Longrightarrow \forall B (A \subset B) \longrightarrow x \in B^d \Longrightarrow \forall F (A \subset F \in \mathfrak{F}) \rightarrow x \in F^- \rightarrow x \in F$ $(\because F^- = F) \Longrightarrow x \in \bigcap \{F : A \subset F \subset \mathfrak{F}\} = A^-$ $(\because (21))$。$\therefore A^d \subset A^-$ (☆☆)

(☆),(☆☆)より、$A \cup A^d \subset A^-$ (**)。(*), (**)より、$A^- = A \cup A^d$ ∎

*

位相空間の各部分集合Aに、部分集合A^-を対応させる関数は、その位相に関する閉包関数（閉包作用素）といえよう。Aが閉集合であることと$A = A^-$なることとは同値だから（Q12 証明せよ）、この作用素は空間の位相を定めてしまうことができる。

先に名をあげた、Kuratowskiは、実際に、(21)のように閉包を定義するかわりに、4つの公準によって、閉包を定義し、そこから出発して位相空間を構成するという仕方を採っている。そこで、つぎには、まずそれらの公準（Kuratowskiの閉包公理）を紹介しつつ、ついで、それが(21)の閉包の定義と一致することを、みよう。

Xにおける閉包作用素は、Xの各部分集合Aに、Xの部分集合A^cを対応させる作用素であって、次の条件をみたすものを、いう。

(23) (i) $\phi^c = \phi$

(ii) $A \subset A^c$

(iii) $A^{cc} = A^c$

(iv) $(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$

このように定義された閉包作用素 ^{c} に関して、つぎの定理がなりたつ。(この定理は、公理(23)が、閉集合公理や近傍公理の場合とまったく同様な位相を与えることを、示すものである。)

(24) $\mathfrak{F} = \{A : A^c = A\}$

$\mathcal{T} = \{U : U = X \sim A,\ A \in \mathfrak{F}\}$

$\longrightarrow$ (i) $\mathcal{T}$ は Xの位相となる。

(ii) A^c は Aの $\mathcal{T}$-閉包（A^-）である。

(証明) (i) 定理(16)を用いて、$\mathfrak{F}$ が、(16)-(i), (ii), (iii)をみたすこ

とを言えば，(i)は証明され，$\mathfrak{F}$はXの閉集合族であると言える。まず，$\emptyset \in \mathfrak{F}$（∵ (23)-(i)）。そして，$\forall F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \longrightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}$（∵ (23)-(iv)）(Q13. 証明せよ)。これから，(16)-(i)が成立つことがいえる。また，$X \subset X^c$（∵ (23)-(ii)）かつ $X \supset X^c$（Q14. なぜか？）だから，$X = X^c$，よって，$X \in \mathfrak{F}$（∵ (24)の前提）。すなわち，(16)-(iii)も成立っている。そこで，のこる(16)-(ii)も成立つことを示したい。

まず，$B \subset A \longrightarrow B^c \subset A^c$ (*) であることがいえる。（なぜならば，$A = (A\sim B)\cup B$（∵ $B\subset A$）$\longrightarrow A^c = ((A\sim B)\cup B)^c = (A\sim B)^c \cup B^c$（∵ (23)-(iv)）$\longrightarrow$ (*)。）$\mathcal{A}$を，$\mathfrak{F}$の空でない部分族とし，$B = \bigcap\{A : A\in\mathcal{A}\}$としてみよう。$\longrightarrow \forall A / B\subset A \longrightarrow B^c \subset \bigcap\{A^c : A\in\mathcal{A}\}$（∵ (*)）$= \bigcap\{A : A\in \mathcal{A}\}$（∵ (24)における，$\mathfrak{F}$の前提）$= B$（仮定）。すなわち，$B^c\subset B$。これと，(23)-(ii)とから，$B^c = B$。ゆえに，$B\in\mathcal{A}$。これで，(16)-(ii)の成立つことがいえた。（したがって，定理(16)の前提がすべてみちびかれたので，定理(16)が成立し，(24)-(i)が結論される。

(ii)では，$A^c = A^-$を証明したい。まず，$A^- = \bigcap\{F : A\subset F \in \mathfrak{F}\}$（(21)，閉包$A^-$の定義）。また，$(A^c)^c = A^c$（(23)-(iii)）$\longrightarrow A^c\in\mathfrak{F}$（(24)での$\mathfrak{F}$の定義）。ゆえに，$A^-\subset A^c$ (**)。一方，定理(16)が成立し，(24)で定義した$\mathfrak{F}$が，$(X,\mathfrak{T})$での閉集合族であると言えたから，$A^-\in\mathfrak{F}$（∵ (21) Def）。また，$A^-\supset A$（∵ (22)）$\longrightarrow A^{-c}\supset A^c$（∵ (*)）$\longrightarrow A^-\supset A^c$（∵ $A^-\in\mathfrak{F}$，(24) Def）(***)。(**)と(***)とから，$A^- = A^c$である。■

N.B. 閉包公準の双対として，開核に関する公準があるので，紹介しておくとしよう（松坂[1968:154f]）。Xの部分集合Aに対して，部分集合A°を対応させる演算子を，開核演算子とよび，つぎの4つの公準をみたすものである，とする。

(25) (i) $X^\circ = X$

(ii) $A^\circ\subset A$

(iii) $A^{\circ\circ} = A^\circ$

(iv) $(A_1\cap A_2)^\circ = A_1^\circ \cap A_2^\circ$

また，定理として，次のような関係がある。

(26) (i) Th $A\in\mathfrak{T} \Longleftrightarrow A^\circ = A$

(ii) $A_1\subset A_2 \longrightarrow A_1^\circ \subset A_2^\circ$

（Q15. (26)を証明せよ。）

開核演算子$\circ$によって，空間の位相を定義することができるであろうことは，当然予想される。実際，次の定理が成立する。

(27) Th $\mathfrak{T} = \{U : U^\circ = U\subset X\}$

$\longrightarrow$ $\mathfrak{T}$はXの位相である。

（Q16. (27)を証明せよ。）

内部と境界

位相空間で，Aが，Aの点xの近傍であるとき，xをAの内点という。すなわち：

(28) Def　xはAの内点である。

$\Longleftrightarrow \exists U(x) / A = U(x) \in \mathcal{U}(x)$

Aのすべての内点の集合を，Aの内部といい，A°とかく。（内部といまのべた開核とは，同じものである。）すなわち：

(29) Def.　$A^\circ = \{x : O(x)\subset A\}$

（Q17　(29)で定義されたAの内部（開核）A°が，(25)の開核公準をみたすことを，たしかめよ。）

内部に関してつぎの一連の命題が成立する。

(30) Th　Aを，$(X,\mathfrak{T})$の部分集合とするならば，

(i) $A^\circ\in\mathfrak{T}$

(ii) $\forall B / B\subset A, B\in\mathfrak{T} \longrightarrow B\subset A^\circ$

(iii) $A\in\mathfrak{T} \Longleftrightarrow A = A^\circ$

(iv) $\{x : x\in A,\ \exists U(x) / U(x)\cap X\sim A = \emptyset\} = A^\circ$

(v) $(X\sim A)^- = X\sim A^\circ$

（証明）(i) A°が，$\mathfrak{T}$-開集合であることを，いう。$\forall x\in A^\circ \longrightarrow$

$^{\exists}O(x) \,/\, x \in O(x) \subset A,\ O(x) \in \mathcal{J}$ ($\because$ (29))。しかるに，$^{\forall}\underline{y \in O(x)}$
$\longrightarrow\ ^{\exists}O(y) \,/\, y \in O(y) \subset O(x) \subset A$ ($\because$ (6)) $\longrightarrow \underline{y \in A^{\circ}}$
($\because$ (29) Def) $\longrightarrow \underline{O(x) \subset A^{\circ}}$ ($\because$ 〜〜)。$\longrightarrow A^{\circ}$: 開集合 ($\because$ ＿
および (8))。

(ii) $^{\forall}x \,/\, x \in V \subset A,\ V \in \mathcal{J} \longrightarrow\ ^{\exists}O(x) \,/\, x \in O(x) \subset A$ ($\because$ (6))
$\longrightarrow x \in A^{\circ}$ ($\because$ (29))。これより $^{\forall}V \subset A^{\circ}$。すなわち，$A^{\circ}$は，$A$に含まれる最大の開集合である。

(iii) $A^{\circ} \subset A$ (29)。しかるに，Aが開集合のとき，(ii)で $V = A$とすることにより，$A \subset A^{\circ}$。よって，$A = A^{\circ}$。逆に，$A = A^{\circ}$なら，A°と同じくAも開集合である。

(iv) $^{\forall}x \,/\, x$は，$X \sim A$の集積点でない $\longrightarrow\ ^{\exists}U(x) \,/\, x \in U(x) \subset A \longrightarrow$
$x \in A^{\circ}$ ($\because$ (28))。(*)　　また，$^{\forall}x \in A^{\circ} \longrightarrow\ ^{\exists}U(x) \,/\, A^{\circ} = U(x) \in \mathcal{U}(x)$
($\because$ (8), (30)-(i)) $\longrightarrow\ ^{\exists}U(x) \,/\, U(x) \cap X \sim A = \phi$ ($\because$ (28)) (**)。(*)
および (**)より，証明了り。

(v) $A^{\circ} = A \sim \{X \sim A$の集積点$\}$ ($\because$ (iv)) $\longrightarrow X \sim A^{\circ} = (X \sim A) \cup$
$\{X \sim A$ の集積点$\}$ (双対) $\longrightarrow X \sim A^{\circ} = (X - A)^{-}$ ($\because$ (22))。■

*

記号の簡便のため，$\underline{X \sim A = A'}$ とおくことにする。$A'' = A$であるから，相対補集合をとる操作$'$は，周期2の作用素である。(<u>Q18.</u> $A'' = A$をいえ)　(30)-(v)でえた結果は，$A^{\circ\prime} = A'^{-}$ とあらわせる。この関係から，

(31)　　$A^{\circ} = A'^{-\prime}$

(32)　　$A^{-} = A'^{\circ\prime}$

がみちびかれる。(<u>Q19.</u> (31), (32)を証明せよ。)　演算子 $\circ$ と $-$ とは，可換でない。(<u>Q20.</u> 例をあげて．$A^{\circ -} \neq A^{-\circ}$ をいえ。)

部分集合 <u>A および $X - A$ の内点とならないような，すべての点の集合</u>を，Aの **境界** といい，$b(A)$とかく。同じことであるが：$b(A)$をつぎのようにかいてみよう。

(33) Def　　$x \in b(A)$

$$\Longleftrightarrow\ ^{\forall}U(x) \,/\, U(x) \cap A \neq \phi,\quad U(x) \cap X \sim A \neq \phi$$

Aの境界と，$X \sim A$の境界とは，明らかに一致する。(<u>Q21.</u> 証明せよ)

境界，閉包，内部の関係は，互いにどのようになっているだろうか？ つぎのような一連の定理がある。

(34) (i) Th　$b(A) = A^{-} \cap (X \sim A)^{-}$　$(= A^{-} \cap A'^{-})$

(ii)　$= A^{-} \sim A^{\circ}$

(iii)　$X \sim b(A) = A^{\circ} \cup (X \sim A)^{\circ}$　$(= A^{\circ} \cup A'^{\circ})$

(iv)　$A^{-} = A \cup b(A)$

(v)　$A^{\circ} = A \sim b(A)$

(証明) (i) $b(A) = X \sim [(X \sim A)^{\circ} \cap A^{\circ}]$ ($\because$ Def)
$= [X \sim (X \sim A)^{\circ}] \cap [X \sim A^{\circ}]$ (ド・モルガン)
$= A'^{\circ\prime} \cap (X \sim A)^{-}$ ($\because$ (30)-(v))
$= A^{-} \cap (X \sim A)^{-}$ ($\because$ (32))

(この証明は 亘 明志，国崎敬一による。)

(ii) $A^{-} \cap (X \sim A)^{-} = A^{-} \cap (X \sim A^{\circ})$ ($\because$ (30)-(iv))
$= A^{-} \cap (X \cap \sim A^{\circ})$
$= A^{-} \cap X \cap \sim A^{\circ} = A^{-} \sim A^{\circ}$

(iii) $X \sim b(A) = X \sim (A^{-} \cap (X \sim A)^{-})$ ($\because$ (i))
$= (X \sim A^{-}) \cup (X \sim (X \sim A)^{-})$ ($\because$ ド・モルガン)
$= (X \sim A^{-}) \cup (X \sim (X \sim A^{\circ}))$ ($\because$ (30)-(v))
$= (X \sim A^{-}) \cup A^{\circ}$
$= (X \sim A^{\circ}) \cup A^{\circ}$ ($\because$ (35))

(iv) $A \cup b(A) = A \cup (A^{-} \cap (X - A)^{-})$ ($\because$ (i))
$= (A \cup A^{-}) \cap (A \cup (X - A)^{-})$
$= A^{-} \cap X$
$= A^{-}$

(v) $A \sim b(A) = A \cap (X \sim b(A))$

$$
\begin{aligned}
&= A \cap (A^\circ \cup (X \sim A)^\circ) \qquad (\because \text{iii}) \\
&= (A \cap A^\circ) \cup (A \cap (X \sim A)^\circ) \\
&= A^\circ \cup \phi \\
&= A^\circ \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

(36) Th. Aが閉集合である $\Longleftrightarrow$ $b(A) \subset A$

(37) Th. Aが開集合である $\Longleftrightarrow$ $b(A) \cap A = \phi$

(証明) (36)と(37)とは双対であるので、片方、すなわち、(37)だけに証明を与えておく。まず、Aが開集合である。$\Longrightarrow$ ${}^\forall x \in A \longrightarrow {}^\exists U(x) / U(x) \subset A$ ($\because$ (8)) $\longrightarrow {}^\exists U(x) / U(x) \cap X \sim A = \phi \longrightarrow x \notin b(A)$ ($\because$ (33)) $\Longrightarrow b(A) \cap A = \phi$ (*)。また、$b(A) \cap A = \phi \Longrightarrow {}^\forall x \in A \longrightarrow x \notin b(A) \longrightarrow {}^\exists U(x) / U(x) \cap A = \phi$ あるいは $U(x) \cap X \sim A = \phi$ ($\because$ (33)) $\Longrightarrow {}^\forall x \in A \longrightarrow {}^\exists U(x) / U(x) \cap X \sim A = \phi \longrightarrow {}^\exists U(x) / U(x) \subset A \Longrightarrow A$は開集合 ($\because$ (8)) (**)。(*)、(**)より、(37)の証明ある。(Q22. (36)を、(37)を用いて証明せよ。Q23. (36)を、直接証明せよ。) $\blacksquare$

N.B. Textによって、さまざまの記号が用いられていることが往々理解のさまたげとなりやすい。そこで、いくつかのTextの記号法を比較しておこう。

	Kelley	入江	松坂	Bourbaki	児玉永見	弥永&弥永
全空間	X	R	S	X	X	X
部分集合	A	M	M	A	A	S
補集合	$X \sim A$; A^c	M^c	M^c	$\complement A$	$X - A$	$X - S$, S^c
閉包	A^-, $\bar{A}$, A^c	M^a	$\bar{M}$, M^a	$\bar{A}$	$\mathrm{Cl}A$, $\bar{A}$	S^a, $\mathrm{cl}(S)$, $\bar{S}$
内部(開核)	A°	M^i	M°, M^i	$\mathring{A}$	$\mathrm{Int}A$, A°	S^i
境界	$b(A)$	M^r	M^f	–	$\mathrm{Bry}A$, ∂A	S^b, ∂S
外部	–	M^e	M^e	–	–	S^e

基と部分基

位相 $\mathcal{T}$ に対する基(基底) $\mathcal{B}$ とは、$\mathcal{T}$ の部分族であって、つぎの条件を、みたすものを、いう。

(38) ${}^\forall x \in X, {}^\forall U(x) \longrightarrow {}^\exists V / x \in V \subset U(x), V \in \mathcal{B}$

すなわち、空間の各点 x と x の各近傍に対し、その近傍に含まれる近傍が $\mathcal{B}$ のなかに存在すること、である。

基を(38)のように定義したが、つぎの(39)もそれと同値な命題であって、定義に採用することもできる。

(39) Th. $\mathcal{B}$ は、位相 $\mathcal{T}$ に対する基である
$\Longleftrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{T}, {}^\forall U \in \mathcal{T} \longrightarrow U$ は $\mathcal{B}$ の要素の和として表される。

(証明) (38)と(39)とが同値であることを、いおう。まず、(38) → (39)を示す。(38)を前提とし、${}^\forall U \in \mathcal{T}$ とする。$V = \bigcup \{B : B \subset U, B \in \mathcal{B}\}$ と定める(*)。${}^\forall x \in U \longrightarrow {}^\exists W / x \in W \subset U, W \in \mathcal{B}$ ($\because$ (38)) $\longrightarrow x \in V$ ($\because$ (*))。$\therefore U \subset V$。しかるに、(*)でのVの決め方より、$U \supset V$。よって $U = V$ ($\mathcal{T}$ の要素は、$\mathcal{B}$ の部分族に属する要素の和としてあらわされた)。

こんどは逆に、(39) → (38)をみちびこう。${}^\forall U \in \mathcal{T} \longrightarrow U$ は、$\mathcal{B}$ の部分族の要素の和として、あらわされる $\Longrightarrow {}^\forall x \in U \longrightarrow {}^\exists V / x \in V \subset U, V \in \mathcal{B}$。よって、$\mathcal{B}$ は、(38)に言うところの基である。$\blacksquare$

では、どのような集合族をみつければ基であるのか? つぎの定理は、集合族が基であるための、必要充分条件を与える。

(40) Th. $\mathcal{B}$ が、$X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$ のある位相 $\mathcal{T}$ に対する基である
$\Longleftrightarrow {}^\forall U, {}^\forall V \in \mathcal{B}, {}^\forall x \in U \cap V$
$\longrightarrow {}^\exists W / x \in W \subset U \cap V, W \in \mathcal{B}$

(証明) 前半。$\mathcal{B}$ が基である $\Longrightarrow {}^\forall U, {}^\forall V \in \mathcal{B}$ をとると、$U \cap V$ は開集合 ($\because$ (11)) $\Longrightarrow {}^\forall x \in U \cap V \longrightarrow {}^\exists W / x \in W \subset U \cap V, W \in \mathcal{B}$ ($\because$ (38), $U \cap V$ は x の近傍である)。後半。$\mathcal{B}$ は、(40)の条件をみたす集合族である。$\mathcal{T} = \{U : U = \bigcup \{B_i\}, B_i \in \mathcal{B}\}$ と定める。$\Longrightarrow {}^\forall U_i \in \mathcal{T} \longrightarrow \bigcup U_i \in \mathcal{T}$ ($\because$ $\mathcal{T}$ の決め方より)、すなわち、位相の公準(1)をみたす。${}^\forall U_1, {}^\forall U_2 \in \mathcal{T}$ ${}^\forall x \in U_1 \cap U_2 \longrightarrow x \in U_1$ かつ $x \in U_2$. $\longrightarrow {}^\exists W_1 / x \in W_1 \subset U_1, W_1 \in \mathcal{B}$ かつ ${}^\exists W_2 / x \in W_2 \subset U_2, W_2 \in \mathcal{B}$ ($\because$ $\mathcal{T}$ の決め方より) $\longrightarrow {}^\exists W / x \in W \subset W_1 \cap W_2 \subset U_1 \cap U_2, W \in \mathcal{B}$ ($\because$ (40))。$\Longrightarrow {}^\forall x \in U_1 \cap U_2 \longrightarrow x \in W \in \mathcal{B}$ だから、$U_1 \cap U_2$ は $\mathcal{B}$ の要素の和である。$\Longrightarrow U_1 \cap$

$U_2 \in \mathcal{T}$. すなわち、位相の公準(2)もみたされている。 したがって、$\mathcal{T}$は位相である。■

*

任意の集合族が、基となるわけではない。（Q24. 基とならない集合族の例をあげよ）しかし、集合族 $\mathcal{S}$ があったとすれば、$\mathcal{S}$ が位相を与えるような空間は、$X = \bigcup\{S : S \in \mathcal{S}\}$ 以外にない。では、どのように位相を与えればよいか？

(41) Th. $\mathcal{S}$：空でない、集合族、$X = \bigcup\{S : S \in \mathcal{S}\}$

$\longrightarrow \mathcal{B} = \{B : B = \bigcap_{i \in I} S_i ,\ S_i \in \mathcal{S}\}$ はXのある位相の基である。

この定理は、$\mathcal{S}$が与えられたときに、$\mathcal{S}$の有限個の要素の共通部分全体からなる族$\mathcal{B}$をつくるなら、それが、Xの基になることを、言っている。

（証明）$\forall B_1, \forall B_2 \in \mathcal{B} \longrightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$（∵$\mathcal{B}$のつくり方による）。そこで、

$\forall x \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \longrightarrow \exists W / x \in W \subset B_1 \cap B_2$, $W \in \mathcal{B}$ がいえる。

それゆえ、(40)の条件に合致するから、$\mathcal{B}$は基であるといえる。■

(41)で、$\mathcal{B}$は基であるが、$\mathcal{S}$は、そのようなときに、部分基であるという。きちんと定義すれば：

(42) Def. $\mathcal{S}$が位相$\mathcal{T}$に対する部分基である

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{S}$の有限個の要素の共通部分の族が、$\mathcal{T}$に対する基である。

これは、$\mathcal{T}$の各要素が$\mathcal{S}$の有限個の要素の共通部分の和として表わせるとき、$\mathcal{S}$は$\mathcal{T}$の部分基だ、と言いかえてもよい。

(41)より、任意の空でない集合族は、ある位相に対する部分基である、と言える。この位相は、$\mathcal{S}$が定まれば、一意的に定まる。（Q25、なぜそうか、いえ）これは、$\mathcal{S}$を含むXの最小の位相である。（Q26、証明せよ——松坂[1968:167]の定理13は、参考になる。）

*

位相空間の性質は、位相の基の性質に大きく依存している。と

くに、位相が可算の基をもっている場合には、その空間は第2可算公理をみたす、という。

(43) Th. Aは、位相が可算基をもつ空間の、非可算部分集合である

$\longrightarrow \exists x / x \in A, \forall U(x) \cap (A \sim \{x\}) \neq \phi$

（証明）背理法により Aのどの点も、Aの集積点ではない、と考えてみる。

$\Longrightarrow \forall x \in A \longrightarrow \exists O(x) / O(x) \cap (A - \{x\}) = \phi$, $O(x) \in \mathcal{T}$。

可算基を$\mathcal{B}$としよう。$\longrightarrow \exists B_x / B_x \cap A = \{x\}$, $B_x \in \mathcal{B}$

（∵(38)）$\Longrightarrow$ Aの各点と、$\mathcal{B}$の部分族の要素とが、1対1に対応する $\Longrightarrow$ Aは可算集合である（Contra.）。■

つぎに、稠密（dense）、可分（separable）の概念を定義しておこう。

(44) Def. AはXで稠密である

$\Longleftrightarrow A^- = X$

(45) Def. 位相空間Xは可分である

$\Longleftrightarrow$ XはXで稠密となる可算部分集合を含む

可分な空間の位相が、可算基をもつとは、かぎらない。すなわち、可分な空間で、第2可算公理をみたさないような空間が存在する。（Q27、証明を試みよ——Kelley[1955=1968:47]が参考になる。）しかし、その逆は成立する。つぎの定理がそれである。

(46) Th. 位相が可算基をもつ空間は、可分である。

（証明）可算基$\mathcal{B}$の各要素から、ひとつずつ点をえらんで可算集合Aをつくる。$X \sim A^-$ は、開集合（∵A^-は閉集合）。$\forall x \in X \sim A^- \longrightarrow x \notin A$（∵(22)）。$\Longrightarrow \forall B (\neq \phi) \in \mathcal{B} \longrightarrow B \cap X \sim (X \sim A^-) \neq \phi$

（∵$B \cap A \neq \phi$）$\longrightarrow \sim\exists B / B \subset X \sim A^- \underset{(*)}{\Longrightarrow} X \sim A^- = \phi \Longrightarrow X = A^-$（稠密）

$\Rightarrow$ Xは可分（∵(45)）。（(*)…$X \sim A^-$は開集合だから、位相に属すが、ϕ以外のどの$\mathcal{B}$の要素をもふくまないので、それ自身ϕであるしかない、（∵(38)）ということである。）■

*

(47) Def. 集合族 $\mathcal{A}$ が，集合 B の被覆である

$$\Longleftrightarrow B \subset \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$$

$\mathcal{A}$ が被覆であれば，B の各点は，$\mathcal{A}$ のある要素に属する。$\mathcal{A}$ が開集合の族であるとき，$\mathcal{A}$ は開被覆である。$\mathcal{A}$ の部分族が被覆になっていときは，$\mathcal{A}$ の部分被覆である，という。

被覆に関連する定理のなかでは，つぎの Lindelöf による定理が重要である。

(48) Th. 可算基をもつ位相空間の部分集合の任意の開被覆は，可算部分被覆をもつ。

(証明) A：位相空間　$\mathcal{A}$：A の開被覆　$\mathcal{B}$：可算基　とする。$\forall x \in A \longrightarrow \exists O_i / x \in O_i \in \mathcal{A} \longrightarrow \exists B_i, \exists O_i / x \in B_i \subset O_i \in \mathcal{A}$。このようにしてえられた可算族 $\{B_i\} \subset \mathcal{B}$ は，A を被覆する。そこで $\mathcal{A}$ のなかから，B_i を含む O_i をひとつづつえらべば，それら，$\mathcal{A}$ の可算部分族 $\{O_i\}$ はすでに A を被覆している。■

この定理に関連しつぎの定義を与える。

(49) Def. 位相空間が Lindelöf 空間である

$\Longleftrightarrow$ 空間の任意の開被覆が可算部分被覆をもつ。

*

第1可算公理について，こんどはのべることにしよう。この公理は，さきの第2公理と異って，局所的な命題である。位相空間の点 x のあらゆる近傍の族を，$\mathcal{U}(x)$；そのある部分族を $\mathcal{U}^*(x)$ とする。

(50) Def. $\mathcal{U}^*(x)$ は，x の近傍系の基である

$$\Longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) \longrightarrow \exists U^* / x \in U^* \subset U,\ U^* \in \mathcal{U}^*(x)$$

N.B. 近傍系の基のことを，局所基とか，基本近傍系とかいうことがある。

(51) Def. 位相空間が第1可算公理をみたす

$\Longleftrightarrow$ 各点の近傍系が，可算な近傍系の基をもつ

(Q28. 近傍系の基の例をあげよ。) 第2可算公理をみたす位相空間は，第1可算公理をみたす。(Q29 なぜ，そう言えるか？) しかし，その逆は成立たない。(Q30. 例をあげよ。)

$U_1, U_2, \cdots, U_n, \cdots$ が x の加算局所基であるとする。そのとき，$V_n \supset V_{n+1}$ $(i = 1, \cdots, n, \cdots)$ であるような加算局所基をつくることができる。(Q31 作ってみよ。)

(52) Def. $\mathcal{V}(x)\ (\subset \mathcal{U}(x))$ は x の近傍系の部分基である

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}(x)$ の有限個の要素の共通部分すべてからなる族は，$\mathcal{U}(x)$ の局所基となる。

N.B. 近傍系の部分基を，局所部分基ともいう。

各点で可算局所部分基が存在する空間は，第1可算公理をみたす。(Q32. これを証明せよ)

相対位相・分離性

位相空間の部分空間，およびその位相（相対位相）について，考えてみよう。位相空間 $(X, \mathcal{T})$ の部分集合 Y に対して，相対位相とよばれる位相 $\mathcal{U}$ をつくることができる。

(53) Def. $\mathcal{U}$ は Y の相対位相である

$$\Longleftrightarrow \exists V / U = V \cap Y,\ V \in \mathcal{T} \rightleftarrows U \in \mathcal{U}$$

このように $\mathcal{U}$ を定めれば $\mathcal{U}$ は実際，位相となっている。(*) $\mathcal{U}$ の各要素を，Y での開集合，その相対補集合 $Y \sim U$ を，Y での閉集合，Y の部分集合の $\mathcal{U}$-閉包を，Y での閉包という。(Q33 Y，および ϕ は，Y での開集合でありかつ Y での閉集合であることをいえ。)

N.B. (*)に説明を与えておこう。(53) を前提して，$\mathcal{U}$ に関して (1)，(2) が成立つことをいう。

(i) $\forall U_1, \forall U_2 \in \mathcal{U} \longrightarrow \exists V_1, \exists V_2 / U_1 = V_1 \cap Y,\ U_2 = V_2 \cap Y,\ V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ (∵(53)) $\longrightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}$ (∵(1)) $\longrightarrow U_1 \cap U_2 = (V_1 \cap Y) \cap (V_2 \cap Y) = (V_1 \cap V_2) \cap Y \in \mathcal{U}$ (∵(53))。

(ii) $\forall U_i \in \mathcal{U} \longrightarrow \exists V_i / U_i = V_i \cap Y,\ V_i \in \mathcal{T}$ (∵(53))

$\longrightarrow \bigcup V_i \in \mathcal{T}$ (∵(2)) $\longrightarrow \bigcup U_i = \bigcup (V_i \cap Y) = (\bigcup V_i) \cap Y \in \mathcal{U}$
(∵(53)) ■

ある位相空間$(Y, \mathcal{U})$が，別の位相空間$(X, \mathcal{T})$の部分空間であると言えるのは，次のような場合である。

(54) Def. $(Y, \mathcal{U})$は$(X, \mathcal{T})$の部分空間である。
$\Longleftrightarrow$ (i) $Y \subset X$
(ii) $\mathcal{U}$は，$\mathcal{T}$の相対位相である。

明らかに，部分空間のそのまた部分空間は，はじめの空間の部分空間にもなる。（Q34. これを証明せよ）

部分空間に関して，つぎの一連の定理がある。

(55) Th. Aが$(X, \mathcal{T})$の部分空間$(Y, \mathcal{U})$の部分集合であるとき，

(i) Aは$\mathcal{U}$-開集合である$\Longleftrightarrow$Aは，Yと$\mathcal{T}$-開集合との共通部分である

(ii) Yの点yが，Aの$\mathcal{U}$-集積点である
$\Longleftrightarrow$ yが$\mathcal{T}$-集積点である

(iii) Aの$\mathcal{U}$-閉包は，YとAの$\mathcal{T}$-閉包との共通部分である。

（証明）(i) AはY-閉集合 $\Longleftrightarrow$ $Y \sim A$は，Y-開集合 (∵(16)) $\Longleftrightarrow Y \sim A \in \mathcal{U} \Longleftrightarrow \exists V / V \cap Y = Y \sim A,\ V \in \mathcal{T}$ (∵(53)) $\Longleftrightarrow \exists V / A = (X \sim V) \cap Y,\ V \in \mathcal{T}$ (or $X \sim V \in \mathcal{T}$)。

(ii) $U(y) \in \mathcal{U} \rightleftarrows \exists V(y) / U(y) = V(y) \cap Y,\ V(y) \in \mathcal{T}$ (∵(53))
さて，$y \in Y$が$\mathcal{U}$-集積点 $\Longleftrightarrow \forall U(y) \in \mathcal{U} \longrightarrow U(y) \cap (A \sim \{y\}) \neq \phi \Longleftrightarrow \forall V(y) \in \mathcal{T} \longrightarrow (V(y) \cap Y) \cap (A \sim \{y\}) \neq \phi \longrightarrow V(y) \cap (A \sim \{y\}) \neq \phi$ (∵$A \subset Y$) $\Longleftrightarrow$ yは，Aの$\mathcal{T}$集積点。

(iii) Aの$\mathcal{U}$-閉包 $= A \cup \{A$の$\mathcal{U}$-集積点$\}$ (∵(22)) $= A \cup (\{A$の$\mathcal{T}$-集積点$\} \cap Y)$ (*) $= Y \cap A$の$\mathcal{T}$-閉包。（(*)……(ii)では$y \in Y$としたが，Aの$\mathcal{T}$閉包($A \subset Y$)のなかには，Yに含まれない点も含まれうる）■

Aが，$(X, \mathcal{T})$の部分空間$(Y, \mathcal{U})$の部分集合であるとしよう。

Yが$\mathcal{T}$-閉集合なら，Aは，$\mathcal{U}$閉集合であるとき，$\mathcal{T}$-閉集合である。（ぎゃくに，Yが$\mathcal{T}$-開集合の場合には，Aは，$\mathcal{U}$-開集合であれば，$\mathcal{T}$-開集合でもある。）（Q35. なぜか？ これを証明せよ） しかし，部分空間でAが$\mathcal{U}$-開(閉)集合であることが判っただけでは，Aが$\mathcal{T}$-開(閉)集合であるかどうか，なんとも言えない。

*

部分集合の分離の概念を，定義しよう。

(56) Def. 部分集合AとBとが，位相空間Xで分離される
$\Longleftrightarrow A^{-} \cap B = \phi = A \cap B^{-}$

つぎの命題は，(56)と同値である。(∵(22))

(57) AとBとが分離される。
$\Longleftrightarrow$ AもBも，互いに他の集合の点および他の集合の集積点を含まない。

(56)の条件を，(55)-(iii)の結果にてらして，$A \cup B$の相対位相を用いて規定してみることも，できる。

(58) AとBとが，分離される。
$\Longleftrightarrow$ AもBも，$A \cup B$で閉集合であり，$A \cap B = \phi$

(59) AとBとが分離される。
$\Longleftrightarrow$ A(あるいはB)は，$A \cup B$で開かつ閉であり，
$A \cap B = \phi$

（Q36. (57),(58),(59)が，(56)と同値な命題であることを，示せ）

部分集合の分離に関する以下3つの定義は，のちのち有用である。

(60) Th. 位相空間Xの部分集合Y，Zの両者が，ともに開集合（もしくはともに閉集合）であるならば，$Y \sim Z$と$Z \sim Y$とは，分離される。

（証明） Y，Zは，Xの開集合 $\Longrightarrow$ Y，Zは，$Y \cup Z$で開集合 (∵Q35)

$\Longrightarrow Y\sim Z=(Y\cup Z)\sim Z$ と，$Z\sim Y=(Y\cup Z)\sim Y$ とは，$Y\cup Z$ で開集合 $\Longrightarrow$ $Y\sim Z$ と $Z\sim Y$ とは，$(Y\sim Z)\cup(Z\sim Y)$ でともに閉集合，しかも，互いに，$(Y\sim Z)\cup(Z\sim Y)$ に関して他の補集合となっているから，ともに開集合。また，$(Y\sim Z)\cap(Z\sim Y)=\phi$。$\Longrightarrow$ $Y\sim Z$ と $Z\sim Y$ とは，分離される。(∵(59))　Y と Z とがともに X の閉集合の場合も，同様。■

(Q37. Y と Z とが，閉集合の場合に，(60)を証明せよ)

(61) Th.　$X=Y\cup Z$，$Y\sim Z$ と $Z\sim Y$ とは，位相空間 X で分離される

$\longrightarrow$ $A^{-}=((A\cap Y)^{-}\cap Y)\cup((A\cap Z)^{-}\cap Z)$

(証明) $A^{-}=(A\cap X)^{-}$ (∵ $A\subset X$) $=(A\cap(Y\cup Z\sim Y))^{-}$ (∵前提)
$=((A\cap Y)\cup(A\cap Z\sim Y))^{-}=(A\cap Y)^{-}\cup(A\cap Z\sim Y)^{-}$ (∵(23)-(iv)) (*)。したがって，$A^{-}\cap Y=((A\cap Y)^{-}\cup(A\cap Z\sim Y)^{-})\cap Y$ (∵(*)) $=((A\cap Y)^{-}\cap Y)\cup((A\cap Z\sim Y)^{-}\cap Y)$ (**)。ところで，$(Z\sim Y)^{-}\cap Y\sim Z=\phi$ (∵分離 (56)) $\Longrightarrow (Z\sim Y)^{-}\subset X\sim(Y\sim Z)\Longrightarrow(Z\sim Y)^{-}\subset Z$ (☆)。$A\cap Z\sim Y\subset Z\sim Y$ $\Longrightarrow (A\cap Z\sim Y)^{-}\subset(Z\sim Y)^{-}$ (∵(23)-(ii)) $\subset Z$ (∵(☆)) (☆☆)。また $Z\sim Y\subset Z \Rightarrow A\cap Z\sim Y\subset A\cap Z \Longrightarrow (A\cap Z\sim Y)^{-}\subset(A\cap Z)^{-}$ (∵(23)-(ii)) (☆☆☆)。(☆☆)，(☆☆☆)より，$(A\cap Z\sim Y)^{-}\subset(A\cap Z)^{-}\cap Z$ (***)。そこで，$A^{-}=A^{-}\cap X=A^{-}\cap(Y\cup Z)=(A^{-}\cap Y)\cup(A^{-}\cap Z)=\{((A\cap Y)^{-}\cap Y)\cup((A\cap Z\sim Y)^{-}\cap Y)\}\cup\{((A\cap Y\sim Z)^{-}\cap Z)\cup((A\cap Z)^{-}\cap Z)\}$ (∵(**)，および，(**)で，Y と Z とをいれかえて) $=((A\cap Y)^{-}\cap Y)\cup((A\cap Z)^{-}\cap Z)$
(∵(***)，および，(***)で，Y と Z とをいれかえて)。■

N.B. この証明は，技巧がいりくんでいるので，もしかしたら，ずっとうまいやり方がみつかるかもしれない。

(62) Cor.　$X=Y\cup Z$，$Y\sim Z$ と $Z\sim Y$ とは，位相空間 X で分離される。

$\longrightarrow$ 部分集合 A は，$A\cap Y$ が Y で閉(開)集合，$A\cap Z$ が Z で閉(開)集合ならば，X で閉(開)集合である。

(証明) ともに閉集合である場合をまず，論じよう。$A\cap Y$ が Y で，$A\cap Z$ が Z で，閉集合 $\Longrightarrow (A\cap Y)^{-}=A\cap Y$，$(A\cap Z)^{-}=A\cap Z$ (∵(21)) (*)。
$A^{-}=((A\cap Y)^{-}\cap Y)\cup((A\cap Z)^{-}\cap Z)$ (∵(61))
$=(A\cap Y\cap Y)\cup(A\cap Z\cap Z)$ (∵(*)) $=(A\cap Y)\cup(A\cap Z)$
$=A\cap(Y\cup Z)=A\cap X$ (∵前提) $=A$
ゆえに，A は，閉集合である。　また，$A\cap Y$ が Y で，$A\cap Z$ が Z でそれぞれ開集合である場合には，$Y\sim A\cap Y=Y\cap X\sim Y\cap A=Y\cap X\sim A$ が閉集合，同じく $Z\cap X\sim A$ が閉集合。そこで，前半の結果から，$X\sim A$ が閉集合である。ゆえに，A は開集合。■

連結集合

連結の概念は，前節でのべた分離の概念を用いて定義される。

(63) Def.　位相空間 $(X,\mathcal{T})$ が連結である。
$\Longleftrightarrow$ X が，分離される空でない2つの集合の和とならない

X の部分集合，Y については，

(64)　部分集合 Y が連結である
$\Longleftrightarrow$ 相対位相をもつ(部分)位相空間 Y が連結である

(64)に同値な命題として，

(65)　部分集合 Y が連結である
$\Longleftrightarrow$ Y が，分離される空でない2つの集合の和とならない

(66)　部分集合 Y が連結である
$\Longleftrightarrow$ Y で閉かつ開である Y の部分集合は，Y それ自身および空集合に限られる。

(Q38, (64),(65),(66)が同値であることをいえ)　(63)から明らかなように，任意の分離しない位相空間は，連結である。

N.B.　(66)の内容を，記号的に表現してみよう。位相空間 $(X,\mathcal{T})$ において，$\mathcal{T}$ は X を台とする開集合族。X を台とする閉集合

族を $\mathfrak{F}$ とすれば，

(67)　　Xが連結である $\Longleftrightarrow \mathfrak{J} \cap \mathfrak{F} = \{X, \phi\}$

としてあらわせる。仮りに，X, ϕ 以外に V_1 があり $V_1 \in \mathfrak{J} \cap \mathfrak{F}$ ならば $V_2 = X \sim V_1$ も，$V_2 \in \mathfrak{J} \cap \mathfrak{F}$ である（Q39 どうして？）。すなわち Xは，ともに空でない 2つの開集合（もしくは閉集合）V_1, V_2 に分離されることになる。こうして

(68)　　$X = V_1 \cup V_2 \quad V_1 \cap V_2 = \phi \quad V_1 \neq \phi \neq V_2$

ぎゃくに (68) のような V_1, V_2 に Xが分離されるようなら，Xは，連結ではない（(63)の条件）。

ついでに，(64)の条件も，記号的に表わしてみると，位相空間Xの部分集合Yが連結であるための，必要充分な条件は，

(69)　　$Y \subset V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 \cap Y = \phi$, $V_1 \cap Y \neq \phi$,
$V_2 \cap Y \neq \phi$

となるような，Xの開集合 V_1, V_2 が存在しないことである。（松坂[1968：196]）（Q39 (69)を証明せよ）

(70) Th.　連結集合の閉包は，連結である。

（証明）Yを，位相空間の連結部分集合とする。Y^-が，連結しておらず，V_1, V_2という分離した集合があって，$Y^- = V_1 \cup V_2$ となると仮定する（帰謬仮説）。$Y \cap V_1 \neq \phi \neq Y \cap V_2$ であるとすれば $Y = Y \cap Y^-$ (∵(23)-(iii)) $= Y \cap (V_1 \cup V_2) = (Y \cap V_1) \cup (Y \cap V_2)$ だから，Yは分離されてしまう。（Q40 厳密に言え）そこでたとえば $Y \cap V_1 = \phi$ とする。$\rightarrow Y \subset V_1 \cup V_2$ より $Y \subset V_2 \rightarrow Y^- \subset V_2^-$。しかし，$V_1 \subset V_1 \cup V_2 \subset Y^-$ $\subset V_2^-$ だから，$V_1 = V_1 \cap V_2^- = \phi$ (Contra.) ■

(71) Th.　位相空間Xの部分集合Yが連結であり，かつ，$Y \subset Z \subset Y^-$ であれば，Zは連結である。

（証明）Zを，相対位相をもつ空間として，Zに関してYの閉包Y^cをとれば $Y^c = Z \cap Y^-$ (∵(65)-(iii)) $= Z$（前提）。(70)より，Zは連結な部分空間であり，かくして，Xの連結な部分集合である（∵(64)）。■

（Q41　(71)を，(70)を用いないで，連結の定義から直接証明せよ――松坂[1968：197]定理2が参考になる）

(72) Th.　$\mathcal{A}$を，連結な部分集合の族とする。$\mathcal{A}$の任意のふたつの要素が分離されない，とすれば，$\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$ は連結である。

（証明）$C = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$，$D$は$C$で開かつ閉な集合，とする。$\Longrightarrow$ $^\forall A \in \mathcal{A}$ について，$A \cap D$は，Aで開かつ閉である (∵(65)-(i)) $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ Aは連結 $\rightarrow A \cap D = A \vee A \cap D = \phi$ (∵(66)) $\rightarrow A \subset D \vee A \subset C \sim D$。さて，$^\forall A_1, {}^\forall A_2 \in \mathcal{A} \underset{*}{\longrightarrow} \sim(A_1 \subset D \wedge A_2 \subset C \sim D) \Longrightarrow (^\forall A \in \mathcal{A} \rightarrow A \subset D) \vee (^\forall A \in \mathcal{A} \rightarrow A \subset C \sim D) \Longrightarrow (D = \phi) \vee (C \sim D = \phi) \Longrightarrow (D = \phi) \vee (D = C) \Longrightarrow$ Cは連結である。■

N.B.　証明中，＊印の推論について補促しよう。かりに，$A_1 \subset D$ かつ $A_2 \subset C \sim D$ とする。Dと$C \sim D$とは，（$D = \phi$もしくは$D = C$でないなら）Cを分離する，すなわち，$D^- \cap C \sim D = \phi = D \cap (C \sim D)^-$ (∵(56)) $\Longrightarrow A_1 \subset D \rightarrow A_1^- \subset D^-$ (p.11の(＊))，$A_2 \subset C \sim D \rightarrow A_2^- \subset (C \sim D)^-$ だから，$A_1^- \cap A_2 = \phi = A_1 \cap A_2^-$ がいえる $\Longrightarrow$ 前提とContra.

＊

さいごに，成分についてふれておこう。

(73) Def.　位相空間の成分とは，極大な連結部分集合である。

極大であるとは，他の連結部分集合に真に含まれないことをいう。また空間の部分集合Aの成分とは，相対位相をもつAの成分のことをいう。すなわちAの，極大連結部分集合である。

空間が連結でないなら，成分はいくつもみつかることになる。

(74) (i) Th.　位相空間の任意の連結部分集合は，ある成分に含まれる。

(ii)　各成分は，閉集合である。

(iii)　C_1, C_2を，位相空間の異なる成分とすれば C_1, C_2は分離される。

（証明）(i) $A\,(\neq \phi)$ を連結部分集合，A を含むすべての連結部分集合の和を，C とする。C は，連結である（∵(T2)：各連結部分集合は，A をともに含んでいるから，分離しない）。C は，あらゆる連結部分集合を含むから，極大である。よって，C は，成分である（(T3)）。

(ii) C は連結 $\longrightarrow$ C^{-} は連結（∵(T0)）$\longrightarrow$ $C = C^{-}$（∵ C：極大）$\longrightarrow$ C は閉集合。

(iii) 異なる成分 C_1，C_2 が分離されない（帰謬仮説）$\Longrightarrow$ $C_1 \cup C_2$ は連結（∵(T2)）（Contra.） ∎

位相空間の2点，x，y が同一の成分に属するならば，この空間を分離したときに，x，y が互いに別々の集合に属することは，ない（<u>Q42</u>．証明せよ）。しかし，空間をどのように分離してもつねにその片方に，ともに属する2点が，異なる成分に属するような場合がある。

N.B. X の2点 x，y に対して，x，y の双方を含むような X の連結部分集合 A が存在するとき，$x \sim y$ とかくことにすれば，$\sim$ は，同値の公準をみたすことが，たしかめられる。

(T5) (i) 1点よりなる部分集合 $\{x\}$ は，明らかに連結であるから，$x \sim x$

(ii) 定義より $x \sim y \Longleftrightarrow y \sim x$ は明らか。

(iii) $x \sim y$，$y \sim z \Longrightarrow \exists A_1 / x \in A_1, y \in A_1$，$\exists A_2 / y \in A_2$，$z \in A_2 \Longrightarrow y \in A_1 \cap A_2 \neq \phi \Longrightarrow A_1 \cup A_2$ も連結（∵(T2)）$\Longrightarrow x \sim z$

—— ◦○◦ ——

REFERENCES

Arnold, B. H. 1962 <u>Intuitive Concepts in Elementary Topology</u> Prentice-Hall Inc., 赤 摂也 訳『トポロジー入門』，1964，共立出版。

入江 昭二 1957『位相解析入門』，岩波書店。

Kelley, John L. 1955 <u>General Topology</u> Van Nostrand Co., 児玉之宏訳，『位相空間論』，1968，吉岡書店。

松坂 和夫 1968『集合・位相入門』，岩波書店。

（追加）

Bourbaki, N. 1965 <u>Elements de mathematique: Topologie generale</u> Hermann，森毅ほか訳，『数学原論：位相1〜5』，1968，東京図書。

位相空間論 CN 61

Hashizume, Daisaburo

1977-11-18 脱稿
1977-11-21 第1刷
1977-12-12 第2刷