乗数理論と加速度原理

橋爪大三郎

本稿は，いわゆる乗数理論と加速度原理との相互作用に関する，P.A. Samuelson の論文（Samuelson，【1939 a】）を中心的にとりあげ，景気変動など関連する問題を含めて，簡略な展望を試みることを，目的とする。

乗数理論と，加速度原理とは，本来別々の分析視角である。一方の乗数理論は，静学的な概念である乗数効果を考察するための理論であるのに対し，いま一方の加速度原理は，投資の変動を消費の変動から説明しようとする，動学的な枠組を与えるものであるから。しかし，Samuelson は，この両者を結合させて論じるとき，国民経済の注目すべき挙動をとらえうることに，いちはやく気付いた。現在わが政府は，大規模な赤字国債を発行し，景気の回復と雇用水準の確保とをはかっているが，そのような財政政策の及ぼす帰趨を見極めるためにも，実に Samuelson の発見は興味ぶかいものがある。そこで，以下，われわれは，順次，乗数理論，加速度原理の内容を吟味した上で，Samuelson の主張点を検討していくことにしよう。

*

1936年，J.M. Keynes が『一般理論』を発表するに及び，在来の経済学の少なからぬ部分がくつがえされ，いわゆるケインズ革命の嵐がまきおこった。Keynes のこの論争的な書物が与えたさまざまの影響は，はかりしれぬほど大きく，またその内容は難解で，今日

に至るも到底汲みつくされたとはいえない。しかし，多くの経済学者たちが Keynes の論点を整理しようと努力する内に，マクロ経済学が徐々に組みたてられていった。

国民所得の分析を目的とするマクロ経済学のモデルには，単純なものから複雑なものまで，さまざまの種別があるが，所得，投資，消費，…… といった，国民経済を構成するマクロ諸変数の相互連関システムとして，経済現象を描きだし，一般均衡理論の枠組みにおいて，その挙動を考察しようとする目的で構成されたモデルである点は，いずれも共通している。そこで，話の便宜のため，最単純なケインズモデルをとりあげてみよう。このモデルは，政府の経済活動や貿易を無視し，実物財の市場のみに着眼するものであって，周知のように，次のようにあらわすことができる：

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & Y = C + I \\ (2) & I = \bar{I} \\ (3) & C = \alpha Y + \beta \end{array}\right\}$$

ただし，言うまでもなく，Y は国民所得を，C は同じく消費を，I は投資を，α（$0<\alpha<1$）は限界消費性向を，β は最低消費水準を示す。

(2)式は，この単純な国民経済のモデルにおいて，投資がシステム外生的に決定されるものであることを示す。投資 I が決定されると（α, β は所与であるから）このシステムを均衡させるような所得と消費の水準 Y°, C° が定まる。均衡所得水準がいかなるところに定まるかは，投資に依存しているのである。したがって，このシステムを，一般均衡理論の枠組において，比較静学の手法をもちこんで分析することができる。たとえば，投資が，何か外生的な要因にもとづいて，1単位の増加をみた場合，（他の要因に変化がなければ）所得および消費の均衡値はどの程度の増加（または減少）をみるのであろうか？　この問いには，(1)〜(3) のモデルを前提にしているなら，容易にこたえることができる。投資の増分 ΔI に対応す

る最終的な所得の増分をΔYとおけば，

(4) $$\Delta Y = \frac{1}{1-\alpha}\Delta I$$

のように解けるから。この $1/1-\alpha$ のことを，乗数（multiplier）という。すなわち，乗数とは，投資の変動のいったい何倍が所得の変動にもたらされるかを表わす，その倍数にほかならない（→ Samuelson [1973＝1974：377]）。

国民経済のモデルを複雑なものにしていくならば，所得水準にかかわるさまざまの外生的な要因の影響を，同じ比較静学の論理にしたがって分析することができる――たとえば，減税の乗数効果（$\alpha/1-\alpha$)，輸出乗数（$1/1-\alpha+m$ ただし m:限界輸入性向），等々。しかし，所得分析の個別的な主題をみていくことは，ここでの目的ではない。また，比較静学の論理それ自体については，簡単にまとめて紹介したことがある（→ 橋爪[1974]）。それゆえ，ここでは，乗数という概念が，投資が所得におよぼす乗数効果の（モデルに固有な）値のことというものである点を，確認するだけにしておこう。

* *

つぎにわれわれは，加速度原理に関連する投資の理論を，やや詳しくみてみよう。

Keynesが『一般理論』で展開した投資論は，いわゆる，「資本の限界効率（marginal efficiency of capital）」にもとづく議論であった。彼は，資本の限界効率表の概念を提出しているが，これは，企業家たちの投資行動を規定する投資関数に相当するものである。彼がいかなる推論の結果このような理論を提出するに至ったか，については，すでに以前ふれたことがあり，充分既知であると思うので，省略し，その結論だけをのべよう。投資の水準Iは，利子率r（および，所得水準Y）の関数である，すなわち，

(5) $$I = I(r, Y)$$

の形に示される。

Keynesの投資論の力点は，利子率が投資を規定する側面に，もっぱらおかれている。（もちろん，利子率の上昇は，投資を縮小させる方向に，はたらくだろう。）しかし，限界効率表それ自体をシフトさせるような要因もまた，存在する――Keynes自身も強調しているように，投資行動は，先行きに関する企業家の微妙な心理に左右される度合が，はなはだ大であるからだ。ことに，景気の動向は投資と密接に関連している。（所得の増加は，効率表を上方に押上げ，投資を活発にする作用をもつ。）したがって，「資本の限界効率表」を固定させて考えてしまうならば，投資論はきわめて非現実的なものとなってしまう可能性が大きい。そこで，投資の種別をより細かく吟味していく必要が生じる。

さて，政府や他の公共団体などが行なう公共投資を別とすれば，投資は，大別して，3つのタイプに区分できるであろう。第1のタイプの投資は，生産物競争（新製品の導入による競争）のための投資というべきものである。新製品のための設備投資，開発研究投資のたぐいは，今日の寡占型企業がマーケットシェアを維持，拡大するために，ますます欠かせないものになりつつある。第2のタイプの投資は，誘発投資（induced investment），すなわち，生産物に対する需要の増加にともなって喚起されるような投資をいう。さらに第3のタイプとして，費用節約のための投資がある。これは，生産費用をきりつめ能率を向上させるような技術上の改良が，そのために必要な新資本設備への支出をまかなって余りあるほどの利潤をもたらすと考えられるときに，行なわれるたぐいの投資である。ある投資が決定されるか否かは，その投資が，これらのうちどのタイプにあてはまるといえるかによって，異った要因に影響されて定まると考えられる。

いまのべたもののうち，第1のタイプ，および第3のタイプは，

目前の市場環境よりも技術進歩など安定した長期的想望により多く依存する。自生的ないし固定的な投資としての色彩が濃い、といえるだろう。それに対して、第2のタイプの投資——誘発投資——は、より短期的な要因の変動を直接にうける。以下、われわれは、このタイプの投資に注目しなければならない。加速度原理がはたらくのは、このタイプの投資においてなのであるから。

一般に、消費にくらべ、投資水準は、（時系列のなかで）はるかにはなはだしく変動する。投資財産業の生産水準が、消費財産業の場合よりも、大きく変動する事実は、かなり以前から気付かれていた。A. Aftalion, C.F. Bickerdike, J.B. Clark といった学者たちは、これを、加速度原理——投資財に対する需要は、投資財を用いて生産される財に対する需要にではなく、その需要の増分に比例して定まる、とする考え方——によって、説明した。投資財（資本設備）は、耐久性があるため、このような現象が生じるのであり、そこに、「加速度」原理という名称の由来もある。

数値例を、Samuelson【1973＝1974：426f】からひいておこう。ある繊維工場では、資本ストック（織機）は、年間売上の2倍に保たれるものとする。はじめのうち、売上げは年3000万ドルであり、資本設備は6000万ドル（1台300万ドルの織機20台）であった。織機は耐用年数20年であり、毎年1台づつ買いかえられる。すなわち、この工場の粗投資は、毎年300万ドルであるが、売上げをのばさない限り、償却分を上回る投資（純投資）は1ドルも行なわれないのである。ところがある年（第t年度）急に売上げがのび、4500万ドルに達した。この需要に応えるためには、この年には、1台ではなく、それプラス新たに10台、計11台の織機を購入しなければならない。売上げはこの年5割ふえたのに対し、織機の需要は、何と、11倍に達する。

加速度原理は、このように劇的な需要の拡大を惹きおこすが、それはまた、逆の方向にも作用する。売上げが毎年1500万ドルづつ伸びつづけていく場合には、毎年11台の織機購入はつづけられよう。しかし、売上げが前年と同じ水準にとどまるなら、織機の需要は、11台からただの1台へと、急落する。そして、売上げが前年より落ちこむようなことがあれば、織機のうち何台かは過剰な遊休設備となり、その年、（あるいはその次の年も、市況が好転しない限り）1台の織機も購入されず、かえって一部の資本ストックを売り払うことにもなりかねない。（以上を、下の Table 1 にまとめる。）

（単位100万ドル）

年次	売上げ	資本ストック	純投資 NI	粗投資 GI＝NI＋減価償却
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
t−1	\$30	\$60	\$0	\$3 × 1 ＝ \$3
t	**45**	90	**30**	\$3 ×(1+10)＝ \$33
t+1	60	120	30	\$3 ×(1+10)＝ \$33
t+2	75	150	30	\$3 ×(1+10)＝ \$33
t+3	**75**	150	**0**	\$3 × 1 ＝ \$3
t+4	73½	147	−3	\$3 ×(−1)＝ −\$3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Table 1

もちろん、いま示した、絵に書いたような加速度原理（acceleration principle）は、さまざまな単純化の上に、主張されている。たとえば、調整費用を無視していること、タイムラグを無視していること、等々がそれである。しかしながら、設備投資の動向が、この加速度原理によって、かなり明確に理解できるようになることは、疑いない。

さてまた、われわれは、これまで無視してきた、もうひとつの種類の投資——在庫投資（inventory investment）——についても、目を向けてみよう。Samuelson は、在庫投資の場合にもまた、加速度原理が比較的よく妥当する、とのべている（Samuelson【1973＝1974：429】）。在庫投資とは、在庫ストックの増分をいうが、実は、こ

れは，総需要の構成部分のうちで，もっとも激しい変動を示すものである。それゆえ，経済活動水準の（特に短期の）変動を扱う場合には，在庫投資に関する議論を抜かすことが，できない。

経済活動水準の変動については，さまざまな議論が，これまでにくりかえされてきた。最近では，主循環と，より小さな小循環と，の両たつをみとめようという立場の者が多い。主循環は，8〜10年程度の周期をもつもので，クズネッツ循環（Kuznets Cycle）ともよばれる。小循環については，さまざまの意見があるが，大体3.5年程度を平均周期とするもので，これに従い，在庫投資の流れはかなりの変動をきたす。なお，これらとは別に，半世紀の周期を有するような長期波動を考えるものもいる。

在庫が保有される動機は，貨幣の場合と同じく，取引動機，予備的動機，投機的動機，の3つにもとづく，と考えられる。このうち，最後のものは，はなはだ不規則であるが，のこる2者は，在庫の変動にある規則性をもたらす。すなわち，正常在庫比率をα，t期の売上げ見込みをS_t^e（$\doteqdot S_{t-1}$）とすれば，正常在庫はαS_t^eである。さらに，t期首に保有する在庫をK_t，調整速度をθ，t期の在庫投資をI_tと示せば，

$$(6)\qquad I_t = \theta(\alpha S_t^e - K_t)$$

あるいは（静学的に），

$$(7)\qquad I_t = \theta(\alpha \cdot S_{t-1} - K_t)$$

のように，在庫投資が決定されると言えよう。これは，加速度原理の一種，伸縮的加速度原理（flexible acceleration principle）が在庫投資に妥当することを，示すものである。（伸縮的加速度原理とは，調整速度（speed of adjustment）—— 一定期間内に埋められる，最適資本量と現存資本量とのあいだのギャップの，割合 —— を考慮した場合の，すなわち，調整費用を考慮した場合の，加速度原理をいう。）

* * *

加速度原理は，このように，投資の動向を説明する理論として，早い時期から注目されていた。Samuelson は，Keynes の『一般理論』が発表されるや，いちはやく，この加速度理論を投資活動全体にまであてはめ，それと Keynes 流の乗数理論とを，ひとつのモデルに統合して，国民所得の時系列的な変化を動学的に分析しよう，という画期的な試みを，なしている。われわれは，この，Samuelson の1939年の論文を検討し，加速度原理と景気変動との連関について，理解を深めようと思う。そうすることは，J.R. Hicks や A.H. Hansen の景気変動論，R.F. Harrod や E.D. Domar の成長論を吟味する場合にも，大いに役立つはずである。

Samuelson のこの論文（【1939a】）は，当時 Hansen が推進していた，乗数分析と加速度原理との統合の試みを，一歩おしすすめたものである。Samuelson がこのテーマに興味を抱いたのは，政府の赤字支出が伴うかもしれない副作用が，看過されてしまう可能性を心配したからであったようだ。たとえば，政府の赤字支出がかえって，それより大きい額の民間の投資を控えさせてしまうような効果をもってしまったなら，このような政府の財政措置は（景気対策の観点から）きわめて有害だろう，と Samuelson は主張する。つづけて，彼が説明のためもちだしているモデルと数値例を，紹介しよう。つづめて示せば，つぎのようになる：

$$(8)\qquad Y_t = C_t + I_t + G_t$$

$$(9)\qquad G_t = 1$$

$$(10)\qquad C_t = \frac{1}{2} Y_{t-1}$$

$$(11)\qquad I_t = C_t - C_{t-1}$$

(8)式は，均衡方程式。(9)式は，第t期以降毎期，政府が1＄の赤

字支出を行うことを示す。(10)式は，最低消費水準ゼロ，限界消費性向½，を仮定するものである（消費は，1期前の所得に，左右される）。(11)式は，民間の誘発投資が，前期から今期にかけての消費の増分に比例することを，のべている（比例定数β——相関率 relation——は，1とおいている）。この式は，明らかに，独立投資——所得水準や資本設備水準に関係なくきまる投資——を捨象し，投資が，まったく加速度原理に従うことを，仮定するものだ。

さて，(8)～(11)のように，$\alpha=1/2$，$\beta=1$としたモデルに初期値を入れ，各期毎に逐次数値を求めて，所得水準の時系列変化を描きだしてみると，下のようである（Table 2）。

この表は，きわめて重大な示唆を，われわれに与えるものだと言えよう。どの期においても，政府は少なからぬ赤字支出を試みてい

Table 2.

期	経常政府支出	前期の支出で誘発された消費	消費の増分に比例する誘発民間投資	国民所得総額
1	1.00	0.00	0.00	1.00
2	1.00	0.50	0.50	2.00
3	1.00	1.00	0.50	2.50
4	1.00	1.25	0.25	2.50
5	1.00	1.25	0.00	2.25
6	1.00	1.125	−0.125	2.00
7	1.00	1.00	−0.125	1.875
8	1.00	0.9375	−0.0625	1.875
9	1.00	0.9375	0.00	1.9375
10	1.00	0.96875	0.03125	2.00
11	1.00	1.00	0.03125	2.03125
12	1.00	1.015625	0.015625	2.03125
13	1.00	1.015625	0.00	2.015625
14	1.00	1.0078125	0.0078125	2.00
---	---	---	---	---

るにもかかわらず，（そして，乗数は $1/1-\alpha=2$ であるはずにもかかわらず，）ある局面で景気は明らかに後退し，民間誘発投資に至っては，マイナスにまで落ちこんでいる。このような結果は，静学的な乗数理論だけからは，全く分析できないものだ。もちろん，このような所得水準の変動は，投資の決定を加速度原理を用いてモデル化したことに，因っている。

さらに一般的な結果をえようと思えば，モデルを，いっそう一般的な形で示せばよい。われわれの均衡条件は，

(8) $$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

であった（言うまでもなく，Y_t は，t期の国民所得，C_t，I_t，G_t は，同じく，消費支出，民間誘発投資，政府支出を，それぞれ示す）。Hansen の仮定によるならば，

(12) $$C_t = \alpha Y_{t-1}$$

(13) $$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) = \alpha\beta Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2}$$

である。また，

(14) $$G_t = 1$$

と仮定しておく。(12)～(14)式を，(8)式に代入すれば，国民所得を，

(15) $$Y_t = 1 + \alpha(1+\beta)Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2}$$

と書き改めることができる。Samuelson は，(15)式に示されるような国民所得水準が，どのような時系列的変化をたどるかを，α，βのさまざまな値に即して，検討した。(15)式は，いわゆる線形2階差分方程式（linear difference equation of 2-nd order）の，特別な場合に相当するので，$\{Y_t\}$の収束，発散等を調べるのは，比較的容易である。この種の方程式の一般的な取扱いについては，本稿末尾に付録を用意したので，参照されたい。

(15)は，定数係数の線形2階差分方程式の，きわめて簡単な場合，すなわち，その一般形が，

(16) $U(x+2)+aU(x+1)+bU(x)=d$ $(b\neq 0)$

として示される場合である。(15)を，上のように整理すれば，

(17) $Y_t-\alpha(1+\beta)Y_{t-1}+\alpha\beta Y_{t-2}=1$

となる。(16)と(17)の係数を比較すれば，Hansen－Samuelson のモデルは，(16)において，

(18) $x=t-2$

(19) $a=-\alpha(1+\beta)$

(20) $b=\alpha\beta$

(21) $d=1$

とした場合であることがわかる。

α（限界消費性向）は，$0<\alpha<1$ なる範囲の数値，また，β は，$0<\beta$ であるから $\alpha\beta\neq 0$。よって，(16)の，$b\neq 0$ の条件はみたされている（2階差分方程式である）。

(16)の形で示される2階差分方程式については，付録で詳しくのべておいた（付録 iv 頁以降）。われわれは，

(22) $0<\alpha<1,\quad 0<\beta$

の範囲で考えればよい。まず，均衡値を求めよう。(16)の均衡値 U^* は，$1+a+b\neq 0$ の場合に存在するが，われわれの場合，

$$1+a+b=1-\alpha(1+\beta)+\alpha\beta$$
$$=1-\alpha\neq 0 \qquad (\because (22))$$

であるから，均衡値 Y^* が存在し，

(23) $Y^*=\dfrac{1}{1-\alpha}$

である。つぎに，この Y^* に $\{Y_t\}$ が収束するための条件は

(24) $1>b>|a|-1$

に(19)，(20)を代入すれば求められて，前半からは

(25) $1>\alpha\beta$

なる条件がみちびかれ，後半は $1>\alpha$ となって，つねに満されていることがわかる。

さらに，均衡値 Y^* の上下を $\{Y_t\}$ が振動するための条件は，

(26) $D=a^2-4b<0$ または

$D=a^2-4b\geqq 0$ かつ $a>0$

に，同じく(19)，(20)を代入すれば えられる。前者からは，

$$\alpha^2(1+\beta)^2-4\alpha\beta<0$$

すなわち，

(27) $\alpha<\dfrac{4\beta}{(1+\beta)^2}$

の条件がえられ，後者は $a>0$ より $-\alpha(1+\beta)>0$ となって，成立しないことが判る。

結果，われわれのえた条件は，(25)＝収束条件，(27)＝振動条件，のふたつであり，この組みあわせによって，あらゆる場合は4通りに区分される。そのそれぞれを，A, B, C, D と名づければ，その範囲は，下のように図示されよう（Fig 1.）。

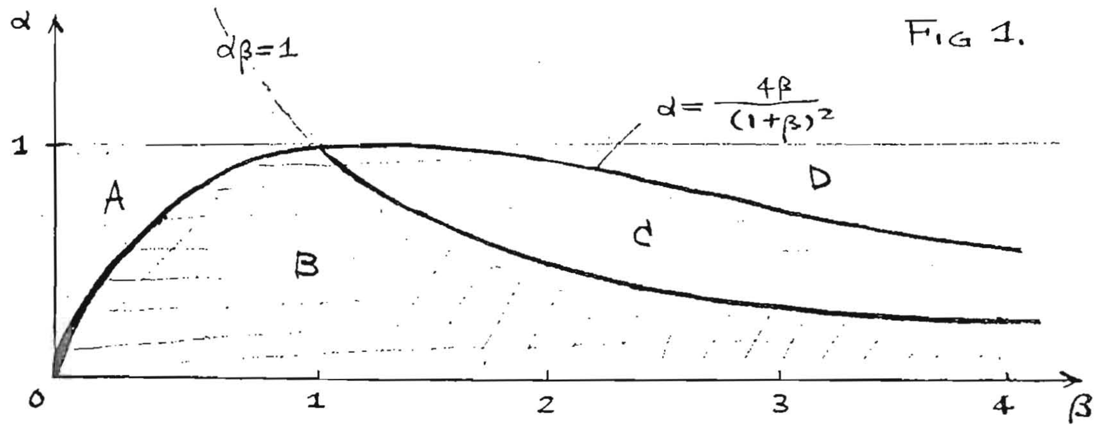

Fig 1.

図中，/// 線部は，均衡値へ収束することを示し，＝ 線部は，均衡値の上下を振動することを示す。

Samuelson は，A, B, C, D それぞれの場合，所得系列が実際どのように変化していくのか，数値例をもって示しているが，われわれは無駄であると思うので，その再録を省略する。

Samuelson が示した以上の帰結を，まとめてみよう。われわれがそこから読みとるべきは，こうである —— Hansen - Samuelson が示した如くに，投資水準の決定に加速度原理をもちこむならば，国民経済は，下の Table 3 に示すような，A，B，C，D の4通りの挙動を示す場合がありうることがみちびかれる，そして，それは，動学的な所得分析の，かなりに妥当な理論モデルであるとみられること。

振動 \ 収束	する	しない
しない	A 所得 Y_t は，均衡値へ漸近的に近づいていく	D 所得 Y_t は，一旦それると，どこまでも均衡値をはなれる。
する	B 所得 Y_t は，波動を小さくしながら，均衡値へ収束	C 所得 Y_t は，均衡値の上下を，次第に大きく波動する。

Table 3

もちろん，この結論は，4通りの趨勢が生じる可能性を言っているだけであって，その極端な場合が生じることを，Samuelson が主張しているわけではない。極端な事態は，たとえば完全雇傭のボトルネックなど，いろいろのメカニズムによって，回避される。

Samuelson の分析は，当時の変動・成長論に，大きなインパクトを与えた。が，その後，この分野でいかなる発展がみられたか，については，稿を改める必要がある。

（以上，30枚，付録とも，48枚）

References

橋爪大三郎 1974，『比較静学』(résumé).

Keynes, John M., 1936, The General Theory of Employment, Interest and Money, Macmillan，塩野谷九十九訳，『雇傭・利子および貨幣の一般理論』，1941，東洋経済新報社．

小泉進・建元正弘 1972，『所得分析』（現代経済学 4），岩波書店．

Samuelson, Paul A., 1939a, Interactions between the Acceleration and the Multiplier, The Review of Economic Statistics, - : - ．小原敬士訳，「乗数分析と加速度原理との相互作用」，高橋長太郎 ed. 1953:13-21.

———— 1939b, A Synthesis of the Principle of Acceleration and Multiplier, The Journal of Political Economy, - : - ．宮沢健一訳，「加速度原理と乗数の綜合」，高橋長太郎 ed. 1953:49-65.

———— 1973, Economics (9th ed.), McGraw-Hill，都留重人訳，『経済学』（上・下），岩波書店．

高橋長太郎 ed. 1953，『乗数理論と加速度原理(増補版)』，勁草書房．

高橋健人 1961，『差分方程式』，培風館．

CN 59 Hashizume Daisaburo

Completed 1978-1-25

1-st Print 1978-1-26

(付録)

定数係数 線形2階 差分方程式の解法

橋爪大三郎

線形2階差分方程式 (linear difference equation of 2nd order) のうち、定数係数をもつものは、一般に、つぎのように示される:

(1) $$U(x+2)+aU(x+1)+bU(x)=R(x) \qquad (b\neq 0)$$

ただし、$U(x)$ は未知の、$R(x)$ は既知の、x の関数であり、a, b はともに定数である。

(1)の一般解は、(1)の特殊解と、(1)に対応する同次方程式((1)で、$R(x)=0$ としたもの)の一般解と、の和になる。そこで(1)の特殊解をもとめるまえに、対応する同次方程式の一般解をもとめておくのが、いいだろう。

*

定数係数の線形2階差分方程式(同次)は、つぎのように示される:

(2) $$U(x+2)+aU(x+1)+bU(x)=0 \qquad (b\neq 0)$$

(2)の同次方程式の特殊解は、ρ をある複素数とすれば、

(3) $$U(x)=\rho^x \qquad (\rho\neq 0)$$

のように示されることが、しられている。(3)を(2)に代入すると、

$$\rho^{x+2}+a\cdot\rho^{x+1}+b\cdot\rho^x=0$$

$$\rho^x(\rho^2+a\cdot\rho+b)=0$$

となり、結局、

(4) $$\rho^2+a\rho+b=0$$

という方程式をうる。逆に、(4)をみたす ρ は、(3)によって、(2)の解を与える。そこで、(4)を、(2)の特性方程式といい、(4)の根を、その特性根という。特性根を、ρ_1, ρ_2 とすれば、それらは、つぎのように求められる:

(5) $$\rho_1=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2-4b}), \quad \rho_2=\frac{1}{2}(-a-\sqrt{a^2-4b})$$

このような ρ_1, ρ_2 によって、(2)の同次方程式の一般解を、つぎのように与えることができる。すなわち、C_1, C_2 を、初期条件をあらわす任意定数とすれば、$\rho_1\neq\rho_2$ のときには、

(6) $$U(x)=C_1\cdot\rho_1^x+C_2\cdot\rho_2^x$$

また、$\rho_1=\rho_2$ のときには、

(7) $$U(x)=(C_1+C_2x)\rho_1^x$$

なる $U(x)$ が、(2)の一般解である。

実際、(6),(7)にいう $U(x)$ は、(2)の方程式を満足し、また、任意に初期条件を与えうる。まず、$\rho_1=\rho_2$ のとき、

(8) $$U(x)=x\cdot\rho_1^x$$

もまた、(2)の解であることを、みよう。(8)より、

$$U(x+2)=(x+2)\rho_1^{x+2}=x\rho_1^{x+2}+2\rho_1^{x+2}$$
$$U(x+1)=(x+1)\rho_1^{x+1}=x\rho_1^{x+1}+\rho_1^{x+1}$$

なので、(2)の左辺をつくってみれば、

(9) $$\begin{aligned}&U(x+2)+aU(x+1)+bU(x)\\ &=x\cdot\rho_1^{x+2}+2\rho_1^{x+2}+ax\rho_1^{x+1}+a\rho_1^{x+1}+bx\rho_1^x\\ &=x\rho_1^x(\rho_1^2+a\rho_1+b)+\rho_1^{x+1}(2\rho_1+a)\end{aligned}$$

であるが、(4)、および、$\rho_1=\rho_2=-\frac{a}{2}$ から、上式は 0 となる。また、同次線形差分方程式には、

(10) $U_1(x)$, $U_2(x)$ が、ともに解であるなら、$U(x)=C_1\cdot U_1(x)+C_2\cdot U_2(x)$ もまた、解である。

という性質があるので、ρ_1^x, ρ_2^x, $x\rho_1^x$ が解であるとき、(6),(7)が(2)の解となることは、明らかである。

つぎに、初期条件について考えてみよう。$\rho_1\neq\rho_2$ のときには、(6)で $x=0$, $x=1$ とおき、$U(0)$ $U(1)$ をそれぞれ α, β とおけば、

(11) $$U(0)=C_1+C_2=\alpha$$

(12) $$U(1)=c_1\rho_1+c_2\rho_2=\beta$$

である。(11),(12)を c_1, c_2 についてとくと、

(13) $$c_1=\frac{\beta-\rho_2\alpha}{\rho_1-\rho_2},\quad c_2=\frac{\alpha\rho_1-\beta}{\rho_1-\rho_2}$$

をうる。任意に α, β を与えられても、(13)によって c_1, c_2 を定めれば、(6)は、(2)の解であるといえる。$\rho_1=\rho_2$ のときには、(7)で $x=0$, $x=1$ とおき、

(14) $$U(0)=c_1=\alpha$$

(15) $$U(1)=(c_1+c_2)\rho_1=\beta$$

をうるが、これを c_1, c_2 についてとけば、

(16) $$c_1=\alpha,\quad c_2=\frac{\beta}{\rho_1}-\alpha \qquad (\because\ b\neq 0 \text{ より}, \rho_1\neq 0)$$

をうる。任意に初期条件を与えられても、(16)によって c_1, c_2 を定めれば、(7)は(2)の解であるといえる。

* *

同次の場合の一般解（これを、同次解という）が、(6),(7)のように求められたので、つぎにわれわれは、非同次の場合の特殊解を、求めるべきであろう。はじめの差分方程式を、再掲する。

(1) $$U(x+2)+aU(x+1)+bU(x)=R(x) \qquad (b\neq 0)$$

同次の場合（(2)）の特性方程式（(4)）、特性根（(5)）を、そのまま、(1)の特性方程式，特性根という。

$R(x)$ が、たとえば x の n 次多項式のように特殊な形をしている場合には、未定係数法により、容易に特殊解を求めることができる。より詳しく言おう。(1)の特性根を、ρ_1, ρ_2 とし、$P_n(x)$ は既知の、$Q_n(x)$ は係数未定の、x の n 次多項式をあらわすものとする。また、α を、既知の定数とする。(1)の右辺が $R(x)=\alpha^x\cdot P_n(x)$ の如くに示される場合には、(1)の特殊解 $U^*(x)$ は、つぎのようにおいて求めればよい。まず、$\alpha\neq\rho_1$, $\alpha\neq\rho_2$ ならば、

(17) $$U^*(x)=\alpha^x Q_n(x)$$

$\alpha=\rho_1\neq\rho_2$ または $\alpha=\rho_2\neq\rho_1$ ならば、

(18) $$U^*(x)=\alpha^x\cdot x\,Q_n(x)$$

$\alpha=\rho_1=\rho_2$ ならば、

(19) $$U^*(x)=\alpha^x\cdot x^2 Q_n(x)$$

とするのである。α が複素数のときには、(1)の右辺が、

$$R(x)=(\beta\sin\varphi x+\gamma\cos\varphi x)\,r^x P_n(x)$$

とあらわせることとなるので、それに対応して、(19)のかわりに

$$U^*(x)=(k_1\sin\varphi x+k_2\cos\varphi x)\,r^x Q_n(x)$$

などとおけばよい。

さらに特殊な場合として、$R(x)$ が定数である場合を、といておこう。差分方程式は、

(20) $$U(x+2)+aU(x+1)+bU(x)=d \qquad (b\neq 0)$$

とあらわせる。これは、(1)の右辺 $R(x)=\alpha^x\cdot P_n(x)$ で、$\alpha=1$, $n=0$ である場合に相当する。(20)の特性方程式は、

(21) $$\rho^2+a\rho+b=0$$

であるが、特性根のひとつが $\alpha(=1)$ であるときには、$1+a+b=0$ であるが（(21)で $\rho=1$ とおいて）、他の1根は、b である。b もまた1のときには、$a=-2$。(19)で $\alpha=1$, $Q_n(x)=k_1$ とおけば、$U^*(x)=k_1x^2$。これを(20)に代入して、

$$k_1(x+2)^2-2k_1(x+1)^2+x^2=d$$

これをといて、$k_1=\frac{d}{2}$ をうる。よって特殊解は、$\frac{d}{2}x^2$。$b\neq 1$ のときには、$a\neq -2$ となる。(18)で $Q_n(x)=k_2$ とおけば、$U^*(x)=k_2x$。これを(20)に代入して、

$$k_2(x+2)-(1+b)k_2(x+1)+k_2bx=d$$

これをといて、$k_2=\frac{d}{1-b}$ をうるから、特殊解 $U^*(x)=\frac{d}{1-b}x$。特

性根がいずれも1でないときには，$1+a+b\neq 0$。このときは，(17)において，特殊解 $U^*(x)=Q_n(x)$ を，均衡値 $U^*=\dfrac{d}{1+a+b}$ にとることができる。特性根が重根であるか（$a^2=4b$のとき），そうでないか（$a^2\neq 4b$ のとき），にしたがって，一般解は，ことなる（(6)，(7)をみよ）。以上をまとめて，一般解に示せば，(i) $1+a+b=0$，$b=1$ （すなわち，$\rho_1=\rho_2=1$）のとき，

$$U(x)=C_1+C_2x+\frac{d}{2}x^2 \tag{22}$$

(ii) $1+a+b=0$，$b\neq 1$ （すなわち，$\rho_1=1$，$\rho_2=b$）のとき，

$$U(x)=C_1+C_2\cdot b^x+\frac{d}{1-b}x \tag{23}$$

(iii) $1+a+b\neq 0$，$a^2=4b$ （すなわち，$\rho_1=\rho_2\neq 1$）のとき，

$$U(x)=(C_1+C_2x)\rho_1^x+\frac{d}{1+a+b} \tag{24}$$

(iv) $1+a+b\neq 0$，$a^2\neq 4b$ （すなわち，$1\neq\rho_1\neq\rho_2\neq 1$）のとき，

$$U(x)=C_1\rho_1^x+C_2\rho_2^x+\frac{d}{1+a+b} \tag{25}$$

である。

* * *

均衡値について，附言しておこう。一般に，差分方程式が，未知関数のほかに変数を含んでいないときには，$U(x)=U(x+1)=\cdots=U^*$ とおけば，差分方程式を，U^*を未知数とする方程式にすることができる。これをとくことができれば，U^*が定まるが，このとき，差分方程式には均衡値U^*が存在する，という。（ただし，任意定数が解になってしまう場合を除く。）

説明のため，線形1階の場合を，例にとろう。

$$U(x+1)+aU(x)=d \qquad (a\neq 0) \tag{26}$$

が，所与の差分方程式である。$a\neq -1$ のとき，(26)には，均衡値U^*が存在して，

$$U^*=\frac{d}{1+a} \tag{27}$$

である。U^*は，定数値関数であるような，(26)の特殊解になっている。実際，(26)の一般解は，$a\neq -1$のとき，

$$U(x)=C\cdot a^x+\frac{d}{1+a} \tag{28}$$

である。aのいかんによって，$U(x)$は，均衡値に収束し，もしくは，収束しない。

線形2階の場合，差分方程式は(20)のように示される。特性根が1でない場合，(20)には，均衡値U^*が存在して，

$$U^*=\frac{d}{1+a+b} \tag{29}$$

となることは，すでにのべた。

(20)の解$U(x)$が，均衡値(29)をもつとき，数列$\{U(x)\}$が，均衡値に収束するのか，あるいはそのまわりを振動するのか，をどのようにして調べればよいだろうか？ $\{U(x)\}$の動きは，特性根によって，まったく規定されている。つぎのようにいいうる。

(30) 解に含まれる特性根のうち，絶対値が最大のものが，負根または虚根に限るとき，$\{U(x)\}$は，均衡値の上下を，振動する。

(31) $\{U(x)\}$がU^*に収束するための必要充分条件は，解に含まれる特性根の絶対値がいずれも1より小さいことである。

$U(x)$と均衡値U^*との差を$V(x)$とおけば，$V(x)$は，(20)に対応する同次方程式，(2)の解になっている。そこで，われわれは，(6)，(7)を吟味すれば，上の結論を容易にみとめるであろう。特性根が，2虚根 ρ_1，ρ_2をもつときには，ρ_1^x，ρ_2^xは互いに共役になる。

$$\rho_1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

のように書けば，(6)は，

$$U(x)=C\,r^x\cos\theta x+C'r^x\sin\theta x \tag{32}$$

と書きかえられるから，収束の条件が $r<1$ なることは，ますます明らかであろう。

差分方程式

$$U(x+2)+aU(x+1)+bU(x)=d \qquad (b\neq 0) \tag{20}$$

の係数と，特性根 ρ_1, ρ_2 との間には，当然であるが，

(31) $\rho_1+\rho_2=-a,\quad \rho_1\rho_2=b$

なる関係がある。また，ρ_1, ρ_2 が虚根ならば，すなわち，(4)の判別式が負（$D=a^2-4b<0$）ならば，

(32) $2r\cos\theta=-a,\quad r^2=b$

のように書ける。そこで，つぎのような諸性質が成立つ。

(33) $b>0$ ならば，虚根，もしくは，同符号の実根，
$b<0$ ならば，異符号の実根

(34) 実根の場合に，
$a>0$ ならば，絶対値が最大な根は，負根
$a<0$ ならば，絶対値が最大な根は，正根，
$a=0$ ならば，正根と負根の絶対値は等しい。

(35) $|b|\geqq 1$ ならば，絶対値が1より小さくない根が，少なくとも1つある。
$|b|<1$ ならば，絶対値が1より小さい根が少なくとも1つある。

(36) 特性根の絶対値がすべて1より小さいために，必要かつ充分な条件は，係数の間に，
$$1>b>|a|-1$$
なる関係が成立つことである。

以上の結果を用いて，(30)，(31)を書きなおすなら，つぎのようになる。

(37) $D=a^2-4b<0$，または，$D\geqq 0$ かつ $a>0$ ならば，（特別の初期値をとる場合をのぞき）$\{U(t)\}$は，均衡値のまわりを振動する。

(38) $\{U(t)\}$が U^* に収束するための必要充分条件は，
$$1>b>|a|-1$$
が成立つことである。

本稿は，乗数理論と加速度原理に関する サムエルソンの論文

Samuelson, Paul A., 1939, Interactions between the Acceleration and the Multiplier, The Review of Economic Statistics (May):

ほかを理解するために必要な限りの知識を，高橋 健人，1961，『差分方程式』，培風館 の該当箇所からぬきだして，まとめたものである。

CN 58
Hashizume Daisaburo
1-st Print 1978-1-26