位相空間論 (3)

橋爪大三郎

このレポートでは、先の『位相空間論』、『位相空間論(2)』にひきつづき、主として Kelley【1955=1968】に依拠して、コンパクトをはじめ、位相空間の基本的な諸性質を扱う。目次は末尾に掲げておく。また、次の略号を文中で用いた。

(1)	橋爪『位相空間論』	(B)	Bourbaki【1965=1968】
(2)	橋爪『位相空間論(2)』	(児)	児玉＆永見【1974】
(K)	Kelley【1955=1968】	(松)	松坂【1968】

*

コンパクト性は、実数の集合がもつ性質の抽象であるが、位相空間論においてもっとも重要なテーマであるといっていい。まず定義を与え、ついでコンパクトな空間の諸性質をたちいって検討しよう。

(1) Def. 位相空間$(X, \mathcal{T})$がコンパクト(compact)である。

$$\rightleftarrows \quad \forall \mathscr{A}(\cup\{A_i : A_i \in \mathscr{A} \subset \mathcal{T}\} \supset X)$$
$$\longrightarrow \exists \mathscr{A}'(\cup\{A_i : A_i \in \mathscr{A}' \subset \mathscr{A} \wedge \operatorname{card} \mathscr{A}' < \aleph_0\} \supset X)$$

(2) Def. $B(\subset X)$がコンパクトである。

$$\rightleftarrows \quad \forall \mathscr{A}(\cup\{A_i : A_i \in \mathscr{A} \subset \mathcal{T}\} \supset B)$$
$$\longrightarrow \exists \mathscr{A}'(\cup\{A_i : A_i \in \mathscr{A}' \subset \mathscr{A} \wedge \operatorname{card} \mathscr{A}' < \aleph_0\} \supset B)$$

(2)は部分集合Bのコンパクトとは、Bの相対位相(↳ Ⅱ; 53)に関してBがコンパクトになることをいっている。(card $\mathscr{A}$ は、濃度の記号。↳(松;66))

同値

コンパクト空間に対しては、(1)の定義と同値な諸命題が成立する。それらを定理として、みちびこう。

(3) Def $\mathscr{A}$ は有限交叉性(finite intersection property)をもつ。

$$\rightleftarrows \quad \forall \mathscr{A}'(\mathscr{A}' \subset \mathscr{A} \wedge \operatorname{card} \mathscr{A}' < \aleph_0 \wedge \mathscr{A}' \neq \phi)$$
$$\longrightarrow \cap\{A_i : A_i \in \mathscr{A}'\} \neq \phi$$

(4) Th. $(X, \mathcal{T})$がコンパクトであることは、(a), (b)と同値。

(a) $\forall \mathscr{C}[(\forall C \in \mathscr{C} \rightarrow X \sim C \in \mathcal{T}) \wedge (\forall \mathscr{C}'(\mathscr{C}' \subset \mathscr{C} \wedge \operatorname{card} \mathscr{C}' < \aleph_0 \wedge \mathscr{C}' \neq \phi) \rightarrow \cap\{C : C \in \mathscr{C}'\} \neq \phi)] \longrightarrow \cap\{C : C \in \mathscr{C}\} \neq \phi$

(b) $\forall \mathscr{D}[\forall \mathscr{D}'(\mathscr{D}' \subset \mathscr{D} \wedge \operatorname{card} \mathscr{D}' < \aleph_0 \wedge \mathscr{D}' \neq \phi) \rightarrow \cap\{D : D \in \mathscr{D}'\} \neq \phi] \longrightarrow \cap\{D^- : D \in \mathscr{D}\} \neq \phi$ (☞(松;210))

(証明) (1)⇄(4)-(a) $X \sim \cup\{A : A \in \mathscr{A}\} = \cap\{X \sim A : A \in \mathscr{A}\}$ (☞(K;5)) $\Longrightarrow X \subset \cup\{A : A \in \mathscr{A}\} \rightleftarrows \cap\{X \sim A : A \in \mathscr{A}\} = \phi$ (*) (1) $\rightleftarrows [\forall \mathscr{A}'(\cup\{A : A \in \mathscr{A}' \subset \mathscr{A} \subset \mathcal{T} \wedge \operatorname{card} \mathscr{A}' < \aleph_0\} \not\supset X) \rightarrow \cup\{A : A \in \mathscr{A}\} \not\supset X$ (∵対偶)$] \rightleftarrows [\forall \mathscr{A}'(\cap\{X \sim A : A \in \mathscr{A}' \subset \mathscr{A} \subset \mathcal{T} \wedge \operatorname{card} \mathscr{A}' < \aleph_0\} \neq \phi) \longrightarrow \cap\{X \sim A : A \in \mathscr{A}\} \neq \phi]$ (∵(*)) ⇄ (4)-(a) (∵$X \sim A$を、Cでおきかえて)　(4)-(a)→(b) $\mathscr{D}$が有限交叉性をもつ $\longrightarrow \mathscr{D}^- = \{D^- : D \in \mathscr{D}\}$も有限交叉性をもつ。また、$\mathscr{D}^-$は閉集合族 $\longrightarrow \cap\{D^- : D \in \mathscr{D}\} \neq \phi$ (∵(a)) ⟶ (b).
(b) → (a) は自明。■

つぎの性質はほとんど明らかであるので各自証明せよ(↳(松;211))。

(5) Th. $(X, \mathcal{T})$がコンパクトである。
$\rightleftarrows$ $B(\subset X)$の任意の開被覆は、有限被覆を含む

(6) Th. $(X, \mathcal{T})$の有限個の部分集合 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ がいずれもコンパクトである。
$\longrightarrow$ $M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$ がコンパクトである。

つぎの定理は、証明しておく。

(7) Th. $(X, \mathcal{T})$: compact
$\longrightarrow$ $\forall M(M \subset X \wedge M^- = M)$: compact

(証明) $\forall \mathscr{A}(\cup\{A : A \in \mathscr{A} \wedge A \in \mathcal{T}\} \supset X) \Longrightarrow \forall M(\cup\{A : A \in \mathscr{A}\} \supset M) \Longrightarrow X = M \cup (X \sim M) = \cup\{A : A \in \mathscr{A}\} \cup (X \sim M) \Longrightarrow \exists \mathscr{A}'(X \subset \cup\{A : A \in \mathscr{A}' \subset \mathscr{A}\} \cup (X \sim M) \wedge \operatorname{card} \mathscr{A}' < \aleph_0)$ (∵X: compact, $X \sim M \in \mathcal{T}$) $\Longrightarrow M \subset \cup\{A : A \in \mathscr{A}'\} \Longrightarrow M$: compact ■

つぎに収束のタームでコンパクトを規定してみよう。

(8) Th. X: compact

$\rightleftarrows$ Xに含まれる任意のネットが、密集点をもつ。 (K:139)

(証明)(密集点については ↳ 2-(33))。(前半) $\forall S\,(S=\{S_n : n\in D\}$, $A_n=\{S_m, S_m\in S \wedge m\geq n\}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{A}=\{A_n : n\in D\}$ は有限交叉性をもつ $\Longrightarrow$ $\mathcal{A}^{-}=\{A_n^{-} : n\in D\}$ は有限交叉性をもつ $\Longrightarrow$ $\bigcap\{A_n^{-} : n\in D\}\neq\phi$ (∵(4)-(a)) $\Longrightarrow$ $\exists s\,\forall A_n^{-}\,(s\in A_n^{-})$ $\Longrightarrow$ s は、ネットSの密集点 (∵(35)) (後半) $\mathcal{C}$: 有限交叉性をもつ閉集合族、$\mathcal{B}$: $\mathcal{C}$のすべての有限個の要素の共通部分の族 $\Longrightarrow$ $\mathcal{B}$は、有限交叉性をもつ。また、$\mathcal{C}\subset\mathcal{B}$。そこで、$\bigcap\{B : B\in\mathcal{B}\}\neq\phi$ ならば 先のTh.((4)-(a))が成立する。$\mathcal{B}$は、$\subset$によって有向づけられる(∵ $\forall B_1 \forall B_2\,(B_1\in\mathcal{B} \wedge B_2\in\mathcal{B} \rightarrow B_1\cap B_2\in\mathcal{B})$)。$\Longrightarrow$ ネット $S\equiv\{S_B : S_B\in B\in\mathcal{B}\}$ をつくれば、Sは密集点 s をもつ(∵仮定) $\Longrightarrow$ $\forall B\,\forall C\,(C\subset B \wedge B, C\in\mathcal{B}) \rightarrow S_C\in C\subset B$ $\Longrightarrow$ $\{S_B : B\in\mathcal{B}\}$ は、ほとんどBに含まれる $\Longrightarrow$ $\forall B\,(s\in B\in\mathcal{B})$ $\Longrightarrow$ $\bigcap\{B : B\in\mathcal{B}\}$ $\Longrightarrow$ X: compact (∵(4)-(a)) ■

(9) Cor. X: compact

$\rightleftarrows$ Xに含まれる任意のネットが、Xのある点に収束する部分ネットをもつ。 (K:139)

(証明) X: compact $\rightleftarrows$ Xに含まれる任意のネットが、密集点をもつ (∵(8)) $\rightleftarrows$ Sのある部分ネットが、その点に収束する。(∵2-(34)) ■

コムパクト性と、集積点との関係をつぎに考える。

(10) Def. 点x は、Aの ω-集積点 である

$\rightleftarrows$ $\forall U\,(x\in U\in\mathcal{U}_x \wedge \mathrm{card}\,(U\cap A)\geq\aleph_0)$ (K:140)

ω-集積点は、また、通常の集積点である。T_1空間では、すべての集積点はまた、ω-集積点にもなっている。

(11) Lemma Xに含まれる任意の列が、密集点をもつ

$\rightleftarrows$ Xに含まれる任意の無限集合が、ω-集積点をもつ (K:140)

(証明)(前半) $\mathrm{card}\,A\geq\aleph_0$ $\Longrightarrow$ Aのなかに 1:1点列がある $\Longrightarrow$ この点列に密集点 s があり(∵仮定)、$\forall U\,(s\in U\in\mathcal{U}_s) \rightarrow \mathrm{card}(U\cap A)=\aleph_0$ (後半) $S\equiv\{S_n : n\in\omega\}$ とすれば、(i) Sの値域は無限集合である、(ii) 有限集合である、のどちらか。(i) $\Longrightarrow$ 値域に、ω-集積点 s がある(∵仮定) $\Longrightarrow$ sは密集点。(ii) $\Longrightarrow$ $\exists x$ (無限個のn $(\in\omega)$について、$x=S_n$) $\Longrightarrow$ xは、密集点 ■

(12) Lemma Lindelöf空間 X に含まれる任意の列が密集点をもつ

$\longrightarrow$ X: compact. (K:140)

(証明) $\mathcal{A}$ をXの開被覆とすれば、仮定から、$\mathcal{A}$の有限部分被覆があることがいえる。$\mathcal{A}\equiv A_1, A_2, \cdots=\{A_i : n\in I\}$ (∵X: Lindelöf)。$X\sim\bigcup\{A_i : i\leq n\}\neq\phi$ (帰謬仮説) $\Longrightarrow$ $\exists x_n\,(x_n\in X\sim\bigcup\{A_i : i\leq n\})$ $\Longrightarrow$ 点列 $S=\{x_n : n\in N\}$ とすれば、Sは密集点 y をもつ(∵仮定) $\Longrightarrow$ $\exists k\,(y\in A_k \wedge k\in N)$ $\Longrightarrow$ $\exists n\,(n>k \wedge x_n\in A_k)$ (∵A_kはyの近傍)。$\wedge$ $x_n\in X\sim\bigcup\{A_i : i\leq n\}$ $\rightarrow$ $x_n\notin A_k$ $\Longrightarrow$ 人 ■

コムパクト性に関連して成立する一連の定理をまとめれば、

(13) Th. 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ において、4つの条件

(a) Xに含まれる任意の無限部分集合は、ω-集積点をもつ

(b) Xに含まれる任意の列は、密集点をもつ

(c) Xに含まれる任意の列に対して、Xの点に収束する部分列が存在する

(d) X: compact

は、① 任意の空間に対して、(d) $\rightarrow$ (a) $\rightleftarrows$ (b)、② Xが第1可算公理をみたせば、(a) $\rightleftarrows$ (b) $\rightleftarrows$ (c)、③ Xが第2可算公理をみたせば、(a) $\rightleftarrows$ (b) $\rightleftarrows$ (c) $\rightleftarrows$ (d)、④ Xが準距離空間ならば、(a)〜(d) いずれもが、第2可算公理をみたすことをいみして、(a) $\rightleftarrows$ (b) $\rightleftarrows$ (c) $\rightleftarrows$ (d)、のような関係にある。 (K:141)

(証明) ① (a) $\rightleftarrows$ (b) (∵(11)) (d) $\longrightarrow$ (b) (∵(9)、列は、ネットである。) ② (b) $\rightleftarrows$ (c) (∵2-(36)) ③ 第2可算公理 $\Longrightarrow$ Lindelöf空間 (∵Ⅱ-(48), (49)) $\Longrightarrow$ (b) $\rightarrow$ (d) (∵(12)) ④ 準距離空間 $\Longrightarrow$ 第1可算公理 (∵(K:122)) $\Longrightarrow$ (a) $\rightleftarrows$ (b) $\rightleftarrows$ (c) $\longleftarrow$ (d)。よって、(a)をみたす準距離空間が第2可算公理をみたすことを、示す: X: 準距離空間とする。$\exists r>0$ に対して $\mathcal{A}=\{A : \forall x, y\in A \rightarrow d(x, y)\geq r\}$ をとる。(K.32)によって、$\mathcal{A}$には、極大な要素 A_r がある。$\longrightarrow$ A_rは、集積点をもたない(∵ $U(x, \frac{r}{2})\cap(A_r-\{x\})=\phi$)から $\mathrm{card}\,A_r<\aleph_0$ (∵A_rが極大であることより)。また、$U(x, \frac{r}{2})\cap A_r\neq\phi$ (∵A_r: 極大) $\longrightarrow$ $A=\bigcup\{A_r : r=\frac{1}{n}, n-1\in\omega\}$ とすれば、$\mathrm{card}\,A=\aleph_0 \wedge A^{-}=X$ $\longrightarrow$ X: 可分 (∵Ⅱ-(45)) $\longrightarrow$ Xは第2可算公理をみたす(∵2-(106)) $\longrightarrow$ (a) $\rightleftarrows$ (b) $\rightleftarrows$ (c) $\rightleftarrows$ (d) (∵③) ■

位相の基、ならびに部分基によって、コンパクトな空間を特徴づけてみる。

(14) Th. Xの位相$\mathcal{T}$の基、$\mathcal{B}$の要素からなる任意のXの被覆が、有限

部分被覆をもつ $\longrightarrow X$: compact (K:142)

(証明) $\mathfrak{T}$の基を$\mathcal{B}$とする。 $\forall \mathcal{C}(X \subset \bigcup\{C : C \in \mathcal{C} \subset \mathfrak{T}\}) \longrightarrow \mathcal{A} = \{B : B \in \mathcal{B} \wedge \exists C(B \subset C \in \mathcal{C})\} \longrightarrow X \subset \bigcup\{B : B \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}\}$ (∵$\mathcal{B}$は基) $\longrightarrow \exists \mathcal{A}'(X \subset \bigcup\{B : B \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \wedge \mathrm{card}\,\mathcal{A}' < \aleph_0\})$ (∵前提) $\longrightarrow \exists \mathcal{C}'(X \subset \bigcup\{C : C \in \mathcal{C}' \subset \mathcal{C} \wedge \mathrm{card}\,\mathcal{C}' < \aleph_0\})$ (∵$\mathcal{A}$の要素を含む$\mathcal{C}$の要素を、ひとつづつとりし) $\longrightarrow X$: compact ∎

(15) Def. $X \not\subset \bigcup\{A : A \in \mathcal{A} \wedge A \subset X\}$

$\rightleftarrows \mathcal{A}$: 不適 (inadequate)

(16) Def. $X \not\subset \bigcup\{A : A \in \mathcal{A} \wedge A \subset X \wedge \mathrm{card}\,\mathcal{A} < \aleph_0\}$

$\rightleftarrows \mathcal{A}$: 有限不適 (finitely inadequate)

(17) Def X : compact

$\rightleftarrows \mathcal{A}(\subset \mathfrak{T})$: 有限不適 $\longrightarrow \mathcal{A}$: 不適

(17)の Def は、(11)の Def を否定すれば、ただちにみちびかれる。

(18) Lemma $\exists A(C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_p \subset A \wedge A \in \mathcal{A}(\subset \mathfrak{T})$: 有限不適な極大族$)$
$\longrightarrow \exists C_i(C_i \in \mathcal{A})$

(証明) $\mathcal{A}$: 有限不適な極大族 $\Longrightarrow \forall C(C \notin \mathcal{A} \wedge C \in \mathfrak{T}) \longrightarrow \exists A_1, \cdots, \exists A_m(C \cup A_1 \cup \cdots \cup A_m = X \wedge A_1, \cdots, A_m \in \mathcal{A})$ (∵極大性) ; $\forall D(D \notin \mathcal{A} \wedge D \in \mathfrak{T}) \longrightarrow \exists B_1, \cdots, \exists B_n(D \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n = X \wedge B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{A}) \Longrightarrow (C \cap D) \cup A_1 \cup \cdots \cup A_m \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n = X \Longrightarrow C \cap D \notin \mathcal{A} \Longrightarrow \forall C_i(C_i \notin \mathcal{A} \wedge C_i \in \mathfrak{T} \wedge i \in N) \longrightarrow \forall O(\bigcap\{C_i : i \in N\} \subset O \notin \mathcal{A} \wedge O \in \mathfrak{T}) \Longrightarrow \exists A(\bigcap\{C_i : i \in N\} \subset A) \longrightarrow \exists C_i(C_i \in \mathcal{A})$ (対偶) ∎

(19) Th. (Alexander) Xの位相の部分基$\mathcal{S}$の要素からなるXの任意の被覆が、有限部分被覆をもつ $\longrightarrow X$: compact

(証明) 前提 ⇄ $\mathcal{S}$の任意の有限不適な部分族は、不適。(対偶 ↳ (17)) (*) さて、$\forall \mathcal{B}(\subset \mathfrak{T})$: 有限不適 $\Longrightarrow \exists \mathcal{A}(\supset \mathcal{B})$: 有限不適な極大族 (∵K:32) $\Longrightarrow \mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{A : A \in \mathcal{S} \wedge A \in \mathcal{A}\}$: 有限不適 (∵$\mathcal{S} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$) $\Longrightarrow \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$: 不適 (∵(*)) $\Longrightarrow \forall x \forall A(x \in A \in \mathcal{A}) \longrightarrow \exists O(x \in O \subset A \wedge O \in \mathfrak{T}) \longrightarrow \exists S_1, \cdots, \exists S_p(x \in S_1 \cap \cdots \cap S_p \subset A \wedge S_1, \cdots, S_p \in \mathcal{S})$ (∵$\mathcal{S}$: 部分基) $\longrightarrow \exists S_i(S_i \in \mathcal{A})$ (∵(18)) $\Longrightarrow \forall x(x \in \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\} \rightarrow x \in \bigcup\{S : S \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}\} \Longrightarrow \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\} \subset \bigcup\{A : A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}\} \Longrightarrow \mathcal{A}$: 不適 (∵不適な集合族に被覆される) $\Longrightarrow X$: compact (∵(17))

コンパクト性と分離性

Hausdorff 空間について思いおこしてみよう。(↳ 2-(19)-T₂)

(20) Def $(X, \mathfrak{T})$: Hausdorff

$\rightleftarrows \forall x \forall y(x \neq y \wedge x \in X \wedge y \in X)$
$\longrightarrow \exists \mathfrak{U} \exists \mathfrak{V}(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V} = \phi \wedge x \in \mathfrak{U} \in \mathfrak{T} \wedge y \in \mathfrak{V} \in \mathfrak{T})$

Hausdorff 空間について、次の性質が成立つのは見易い。

(21) Th. $(X : \mathfrak{T})$: Hausdorff
$\longrightarrow \{x\}$: closed (中 松:215)

(証明) $(X, \mathfrak{T})$: Hausdorff $\Longrightarrow \forall y(y \notin \{x\} \wedge y \in X) \longrightarrow \exists \mathfrak{V}(x \notin \mathfrak{V} \in \mathfrak{T}) \longrightarrow y \notin \overline{\{x\}} \Longrightarrow \{x\} = \overline{\{x\}} \Longrightarrow \{x\}$: closed ∎

(22) Th. X : Hausdorff $\longrightarrow \forall Y(Y \subset X)$: Hausdorff (中 松:215)

(証明) $\forall x \forall y(x \neq y \wedge x \in Y \subset X \wedge y \in Y \subset X) \longrightarrow \exists \mathfrak{U} \exists \mathfrak{V}(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V} = \phi \wedge x \in \mathfrak{U} \in \mathfrak{T} \wedge y \in \mathfrak{V} \in \mathfrak{T})$ (∵ X : Hausdorff 中(20)) $\longrightarrow \exists \mathfrak{U}' \exists \mathfrak{V}'(\mathfrak{U}' \cap \mathfrak{V}' = \phi \wedge x \in \mathfrak{U}' \subset Y \wedge y \in \mathfrak{V}' \subset Y \wedge \mathfrak{U}' = \mathfrak{U} \cap Y \wedge \mathfrak{V}' = \mathfrak{V} \cap Y) \longrightarrow Y$: Hausdorff ∎

コムパクト性と、Hausdorff をはじめとする分離公理との関係をしらべてみよう。

(23) Th. $\left.\begin{array}{l} X : \text{compact} \\ Y(\subset X) : \text{closed} \end{array}\right\} \longrightarrow Y$: compact (K:143)

(証明) $\forall \mathcal{A}(Y \subset \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}) \longrightarrow X = Y \cup (X \sim Y) \subset \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\} \cup (X \sim Y) \longrightarrow \{A : A \in \mathcal{A} \vee A = X \sim Y\}$ は、Xの開被覆 (∵ $X \sim Y$: open) $\longrightarrow \exists \mathcal{A}'[X \subset \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \wedge \mathrm{card}\,\mathcal{A}' < \aleph_0\} \cup (X \sim Y)]$ (∵ X : compact) $\longrightarrow \exists \mathcal{A}'[Y \subset \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \wedge \mathrm{card}\,\mathcal{A}' < \aleph_0\}] \longrightarrow Y$: compact ∎

Hausdorff 空間では、(23)の逆もまた成立する。

(24) Th. $\left.\begin{array}{l} X : \text{Hausdorff} \\ Y(\subset X) : \text{compact} \end{array}\right\} \longrightarrow Y$: closed (K:143 松:215)

(証明) X : Hausdorff $\Longrightarrow \forall x(x \in X \sim Y) \longrightarrow \forall y \exists \mathfrak{U}_y \exists \mathfrak{V}_y(x \in \mathfrak{U}_y \subset (X \sim Y) \wedge y$

$\in V_y \subset Y \wedge U_y \cap V_y = \phi) \Longrightarrow \mathcal{V}_y \equiv \{V_y\} \longrightarrow Y \subset \bigcup\{V_y : V_y \in \mathcal{V}_y\} \Longrightarrow {}^{\exists}\mathcal{V}_y' (Y \subset \bigcup\{V_y' : V_y' \in \mathcal{V}_y' \subset \mathcal{V}_y \wedge \mathrm{card}\,\mathcal{V}_y' < \aleph_0\}) \Longrightarrow U \equiv \bigcap\{U_y' : U_y' \cap V_y' = \phi\} \longrightarrow U \cap V_y' = \phi \Longrightarrow U \cap (\bigcup\{V_y' : V_y' \in \mathcal{V}_y'\}) = \bigcup\{U \cap V_y' : V_y' \in \mathcal{V}_y'\} = \phi \Longrightarrow U \cap Y = \phi \Longrightarrow x \in U \subset \mathcal{T} \wedge U \subset (X \sim Y) \Longrightarrow X \sim Y : \text{open} \Longrightarrow Y : \text{closed}$ ∎

(25) Th. $$\left.\begin{array}{l} X : \text{compact} \\ f : X \to Y \quad \text{連続} \end{array}\right\} \longrightarrow Y = f(X) : \text{compact}$$

(証明) ${}^{\forall}\mathcal{A}\,(Y \subset \bigcup\{A : A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{T}_Y\}) \Longrightarrow X = f^{-1}(Y) \subset \bigcup\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$, (ここで $f^{-1}(A)$: open ($\because f$: 連続) $\longrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$ に注意) $\Longrightarrow {}^{\exists}\mathcal{A}'\,(X \subset \bigcup\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \wedge \mathrm{card}\,\mathcal{A}' < \aleph_0\})$ ($\because X$: compact) $\Longrightarrow {}^{\exists}\mathcal{A}'\,(Y \subset \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \wedge \mathrm{card}\,\mathcal{A}' < \aleph_0\}) \Longrightarrow Y$: compact ∎

(26) Th. $$\left.\begin{array}{l} X : \text{compact} \\ Y : \text{Hausdorff} \\ f : X \to Y \quad \text{連続かつ } 1:1 \end{array}\right\} \longrightarrow f : \text{homeomorphism}$$ 位相同相

(証明) f^{-1} もまた連続なることをいう。(☞ Z–(44)) ${}^{\forall}A\,(X \sim A \in \mathcal{T}_X) \longrightarrow A$: compact ($\because$ (23)) $\longrightarrow f(A)$: compact ($\because$ (25)) $\longrightarrow f(A)$: closed ($\because$ (24)) $\Longrightarrow {}^{\forall}f^{-1}(A)$: 閉 $\longrightarrow A = (f^{-1})^{-1}(A)$: closed ($\because f$: 1対1) $\Longrightarrow {}^{\forall}f^{-1}(A)$: 開 $\longrightarrow A = (f^{-1})^{-1}(A)$: 開 ($\because f$: 1対1) $\Longrightarrow f^{-1}$: 連続 $\Longrightarrow X \approx f(Y)$ ∎

(27) Th. X : compact $\wedge$ Hausdorff $\longrightarrow X$: normal (K:144) (松:227)

(証明) A, B が X : Hausdorff の互いに素な部分集合であるとき. A, B の互いに素な近傍が存在することをいう (☞ Z–(19)–T4)。 ${}^{\forall}A\,{}^{\forall}B\,(A \cap B = \phi \wedge A, B \subset X) \Longrightarrow {}^{\forall}x\,(x \in A) \longrightarrow {}^{\exists}U_x\,{}^{\exists}V_x\,(U_x \cap V_x = \phi \wedge x \in U_x \wedge B \subset V_x)$ ($\because$ (24); K:143) $\longrightarrow U_x^{-} \cap B = \phi \Longrightarrow$ ($\mathcal{U}_x = \{U_x\}$: A の被覆 とすれば) ${}^{\exists}\mathcal{U}_x'\,(A \subset \bigcup\{U_x' : U_x' \in \mathcal{U}_x' \subset \mathcal{U}_x \wedge \mathrm{card}\,\mathcal{U}_x' < \aleph_0\}$ ($\because A$: compact) $\Longrightarrow U \equiv \bigcup\{U_x' : U_x' \in \mathcal{U}_x'\}$ とすれば $A \subset U \in \mathcal{T} \wedge B \subset X \sim U^{-} \in \mathcal{T} \wedge U \cap (X \sim U^{-}) = \phi$ すなわち. U, $X \sim U^{-}$ は. 求める近傍である。∎

(28) Th. X : compact $\wedge$ regular $\longrightarrow X$: normal

(証明) ${}^{\forall}x\,{}^{\forall}A\,(x \in A \subset U \subset X \wedge A \subset U^{\circ})$ (U は A の近傍) $\Longrightarrow {}^{\exists}W_x\,(x \in W_x^{-} \subset U \wedge W_x \in \mathcal{T})$ ($\because X$: regular (K:114)) $\Longrightarrow \mathcal{W}_x = \{W_x : x \in A\}$ とおけば $A \subset \bigcup$

$\{W_x : W_x \in \mathcal{W}_x\} \Longrightarrow {}^{\exists}\mathcal{W}_x'\,(A \subset \bigcup\{W_x' : W_x' \in \mathcal{W}_x' \subset \mathcal{W}_x \wedge \mathrm{card}\,\mathcal{W}_x' < \aleph_0\})$ ($\because A$: compact) $\Longrightarrow V \equiv \bigcup\{W_x^{-} : W_x \in \mathcal{W}_x'\} \subset U$ は, A の閉近傍となっている $\Longrightarrow X$: normal (☞ (K:114) X : normal $\rightleftarrows A (\subset X)$ の近傍系の基として. A の閉近傍系がとれる) ∎

(29) Th. $$\left.\begin{array}{l} X : \text{completely regular} \\ A : \text{compact} \\ U : A \subset U^{\circ} \end{array}\right\} \longrightarrow {}^{\exists}f : \text{連続}, \begin{cases} f(x) = 0 & (x \in X \sim U) \\ f(x) = 1 & (x \in A) \end{cases}$$

(証明) X : 完全正則 $\Longrightarrow$ 連続関数 $g : X \to [0, 1]$ があって, $g(y) = 1\ (y = x \in A) \wedge g(y) = 0\ (y \in X \sim U)$ ($\because$ (91)) $\Longrightarrow \{y : g(y) > \frac{1}{2}\}$: open ($\because g$: 連続) $\Longrightarrow h(y) \equiv \min(2g(y), 1)$ とすれば $h : X \to [0, 1]$ は, $h(y) = 0\ (y \in X \sim U)$, $h(y) = 1\ (y \in U_x \wedge x \in U_x^{\circ}) \Longrightarrow A \subset \bigcup\{U_{x_i} : U_{x_i} = h_i^{-1}(1) \wedge i = 1, \cdots, n;\ x_i \in A\}$ なる, $h_1, \cdots, h_i, \cdots, h_n$ が存在する ($\because A$: compact)。$\Longrightarrow f(x) \equiv \max\{h_i(x) : i = 1, \cdots, n\} \longrightarrow f(x) = 0\ (x \in X \sim U) \wedge f(x) = 1\ (x \in A) \wedge$ 連続。∎

(30) Th. (Wallace) $$\left.\begin{array}{l} A (\subset X) : \text{compact} \\ B (\subset Y) : \text{compact} \\ W (\subset X \times Y) : A \times B \subset W^{\circ} \end{array}\right\} \longrightarrow {}^{\exists}U\,{}^{\exists}V\,(A \subset U^{\circ} \wedge B \subset V^{\circ} \wedge U \times V \subset W)$$

(証明) ${}^{\forall}x\,{}^{\forall}y\,[(x, y) \in A \times B] \longrightarrow {}^{\exists}R\,{}^{\exists}S\,(x \in R \in \mathcal{T}_X \wedge y \in S \in \mathcal{T}_Y \wedge R \times S \subset W) \Longrightarrow {}^{\forall}x\,(x \in A) \to {}^{\exists}R_i\,{}^{\exists}S_i\,(x \in R_i \subset \mathcal{T}_X \wedge y \in S_i \in \mathcal{T}_Y \wedge B \subset Q \equiv \bigcup\{S_i ; i = 1, \cdots, n\})$ ($\because$ B : compact)。 $P \equiv \bigcap\{R_i : i = 1, \cdots, n\}$ とすれば $x \in P^{\circ}$ であり. $P \times Q \subset W \wedge B \subset Q^{\circ} \Longrightarrow A$: compact $\longrightarrow {}^{\exists}P_i\,{}^{\exists}Q_i\,(x \in P_i \in \mathcal{T}_X \wedge B \subset Q_i \in \mathcal{T}_Y \wedge P_i \times Q_i \subset W \wedge A \subset \bigcup\{P_i : i = 1, \cdots, m\} \equiv U)\ (i = 1, \cdots, m) \Longrightarrow U$ および $V \equiv \bigcap\{Q_i ; i = 1, \cdots, m\}$ は. 求める近傍になっている。∎

コムパクト空間の積

(31) Th (Tychonoff) X_λ : compact $\longrightarrow \times\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$: compact

(証明) $Q \equiv \times\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ とする。(Qは積位相をもつとする。) $P_\lambda : X \to X_\lambda$ を射影とし、$\mathcal{S} \equiv \{U : {}^\exists U_\lambda [U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \wedge U = P_\lambda^{-1}(U_\lambda)]\}$ とすれば: $\mathcal{S}$は、積位相の部分基となる。(19)(Alexander) より、Q: compact $\rightleftarrows$ ${}^\forall \mathcal{A}(\subset \mathcal{S})$: 有限不適 $\to \mathcal{A}$: 不適。

$\Longrightarrow {}^\forall \lambda \in \Lambda \to \mathcal{B}_\lambda \equiv \{U : P_\lambda^{-1}(U) \in \mathcal{A}\} \to \mathcal{B}_\lambda$は、$X_\lambda$において有限不適 $\to$ ${}^\exists x_\lambda {}^\forall U (x_\lambda \in X \sim U \wedge U \in \mathcal{B}_\lambda) \Longrightarrow {}^\exists x {}^\forall A \{P_\lambda(x) = x_\lambda \wedge x \notin A \in \mathcal{A}\} \to$ A: 不適 ∎

(32) Def. $A(\subset X$: 準距離空間$)$: 有界 (bounded)

$\rightleftarrows {}^\exists n (d(A) < n)$

---

(33) Th (Heine-Borel-Lebesgue)

$A(\subset R^n)$: compact

$\rightleftarrows$ A: closed $\wedge$ bounded (入江:101)

(証明) (前半) A: compact $\longrightarrow$ A: closed ($\because R^n$: Hausdorff ; (24)) また、Aは有限個の直径1の開球によって被覆される($\because$ compact)から、有界。(後半) $A(\subset R^n)$: closed $\wedge$ bounded $\Longrightarrow {}^\exists I^n (A \subset I^n)$ (I^n: 直方体) ($\because A$: bounded) $\Longrightarrow$ Aは、I^nでも closed ($\because I^n$: closed) $\wedge$ I^n: compact ($\because I(\subset R)$: compact) $\Longrightarrow A$: compact ($\because$ (23)) ∎

---

(34) Th. X: Tychonoff

$\rightleftarrows X \approx Y \subset Z$: compact $\wedge$ Hausdorff

---

(証明) X: tychonoff $\rightleftarrows X \approx W \subset Q^F$(立方体) ($\because$ 2-(96)), Q^F: compact $\wedge$ Hausdorff。 Z: compact $\wedge$ Hausdorff $\to$ Z: normal ($\because$ (27)) $\to$ Z: Tychonoff ($\because$ (87)) $\to Y(\subset Z)$: Tychonoff (㊥(K:44)) ∎

(35) Def. $A(\subset X)$: 全疎 (nowhere-dense)

$\rightleftarrows A^\circ = \phi$

---

(36) Th. 無限個の座標空間が、コムパクトでない

$\longrightarrow {}^\forall A (A \subset X$: 積空間 $\wedge A$: compact$) \to A$: nowhere-dense (K:148)

(証明) ${}^\exists B {}^\exists x (B \subset \times\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \wedge x \in B^\circ \neq \phi\}) \to {}^\exists U (U \subset B \wedge U$は積位相の基$) \to {}^\exists F {}^\exists V_\lambda (U = \cap\{P_\lambda^{-1}(V_\lambda) : \lambda \in F \subset \Lambda \wedge \mathrm{card}\, F < \aleph_0 \wedge V_F \in \mathcal{T}_\lambda\})$ $\Longrightarrow b \in \Lambda \sim F \longrightarrow P_b(B) = X_b$: compact ($\because B$: compact, P_b: 連続) $\Longrightarrow$ 有限個をのぞく X_λは、コムパクト。(対偶がいえている。) ∎

局所コムパクト空間

(37) Def. X: 局所コムパクト (locally compact)

$\rightleftarrows {}^\forall x {}^\exists U (x \in U^\circ \subset X \wedge U$: compact$)$

---

(38) Th. X: (Hausdorff $\vee$ regular) $\wedge$ locally compact

$\longrightarrow {}^\forall x (x \in X \wedge x$のコンパクトな閉近傍族は、$x$の近傍系の基である)

(証明) ${}^\forall x \in X$, ${}^\forall U (x \in U^\circ)$, ${}^\forall C (x \in C^\circ \wedge C$: compact$) \Longrightarrow X$: regular $\longrightarrow$ ${}^\exists V (x \in V = V^- \subset U^\circ \cap C^\circ) \to V$: closed $\wedge$ compact ($\because$ (23)) $\Rightarrow$ コンパクトな閉近傍族は近傍系の基となる。また、X: Hausdorff $\longrightarrow W \equiv (U \cap C)^\circ \Longrightarrow W^-$: compact $\wedge$ Hausdorff ($\because$ K:44, (23)) $\longrightarrow W^-$: normal ($\because$ (27)) $\longrightarrow W^-$: regular ($\because W^-$: Hausdorff $\to T_1$ ㊥ 2-(21)) $\longrightarrow {}^\exists V (x \in V^\circ \subset V \subset W^- \wedge V$: closed$)$ ($\because$ (K:114)) しかるに、$V \subset W$ (xの開近傍)でもある $\Longrightarrow$ Vは、xのXにおける近傍 ($\because$ 開近傍の近傍は、近傍) $\Rightarrow V$: closed は、近傍系の基 ∎

---

(39) Th. X: Hausdorff $\wedge$ locally compact

$\longrightarrow X$: regular (B:77)

(証明) ${}^\forall x {}^\exists U (x \in U^\circ \subset X \wedge U$: compact$) \longrightarrow U$: closed ($\because X$: Hausdorff ㊥ (24)) $\Longrightarrow U$: regular ($\because$ B:71) $\Longrightarrow X$: regular ($\because U$: closed ㊥ (B:67)) ∎

---

(40) Th.

$\begin{cases} X: \text{regular} \wedge \text{locally compact} \\ A(\subset X): \text{closed} \wedge \text{compact} \\ U: A \subset U^\circ \end{cases}$

$\longrightarrow {}^\exists V (A \subset V^\circ \subset V = V^- \subset U)$

${}^\exists f : X \to [0, 1]$ 連続 $\begin{cases} f(x) = 0 & (x \in A) \\ f(x) = 1 & (x \in X \sim V) \end{cases}$ (K:149)

(証明) ${}^\forall x (x \in A) \longrightarrow {}^\exists W_x (x \in W_x^\circ \subset W_x \subset U \wedge W_x$: compact $\wedge$ closed$) \Longrightarrow \mathcal{W} \equiv \{W_x : x \in A\}$ とすれば: $A \subset \cup\{W_x : W_x \in \mathcal{W}\} \subset U \longrightarrow {}^\exists \mathcal{W}' (A \subset \cup\{W'_x : W'_x$

$\in \mathcal{W}' \subset \mathcal{W} \wedge \operatorname{card} \mathcal{W}' < \aleph_0\}$ ($\because A$: compact) $\Rightarrow V \equiv \bigcup\{W'_x : W'_x \in \mathcal{W}'\}$ とすれば: $A \subset V^\circ \subset V \subset U \wedge V$: closed $\wedge$ compact ($\because$ (6)) $\longrightarrow V$: normal ($\because X$: regular $\rightarrow V$: regular; (28)) $\Longrightarrow \exists g : V \rightarrow [0,1]\,;\, g(x) = 0\ (\forall x \in A) \wedge g(x) = 1\ (\forall x \in V \sim V^\circ)$, g は連続 ($\because$ 2-(57)) $\Longrightarrow f(x) \equiv g(x)\ (\forall x \in V)$, $\equiv 1\ (\forall x \in X \sim V) \longrightarrow f$ は X で連続 (φ K:3B) ∎

(41)	Th.	X: regular $\wedge$ locally compact $\longrightarrow$ X: completely regular (K:149)

(証明) (40) からただちに知られる ∎

(42)	Th.	X: Hausdorff $\wedge$ locally compact $\longrightarrow$ X: Tychonoff (K:149)

(証明) ↳ (34) & else ∎

(43)	Th.	X: locally compact f: open $\wedge$ continuous $\longrightarrow Y = f(X)$: locally compact (K:149)

(証明) $\forall x\,(x \in X) \longrightarrow \exists V\ (x \in V^\circ \subset V \wedge V$: compact$) \longrightarrow f(V)$: compact ($\because$ (25)); また $f(V^\circ)$: open ($\because f$: open) $\Longrightarrow f(x) \in f(V^\circ) \subset f(V) \Longrightarrow f(X)$: locally compact ∎

(44)	Th.	$\times\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$: locally compact $\longrightarrow$ (a) $X_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$: locally compact (b) 有限個をのぞく X_λ: compact

(証明) $P_\lambda : \times\{X_\lambda\} \rightarrow X_\lambda$ は,開かつ連続 $\longrightarrow$ (a) ($\because$ (43))。 (b) の対偶をいう。無限個の X_λ が compact でない。$\longrightarrow$ 積空間の任意のコムパクト部分集合は, nowhere-dense ($\because$ (36)) $\longrightarrow$ コムパクト集合は,その各点の近傍となりえない $\longrightarrow$ 積空間のいかなる点も, compact な近傍をもちえない $\longrightarrow \times\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ は, locally compact でない。∎

商空間

(45) Def. $A\,(\subset X)$: 許容的 (admissible)

$\Longleftrightarrow \exists \mathfrak{D}'\,(A = \bigcup\{D : D \in \mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$: X の分解$\})$

(46)	Th.	$\mathfrak{D}$: X の,上半連続な分解。商位相をもつ。 $D\,(\in \mathfrak{D})$: compact とすれば: (a) X: Hausdorff $\longrightarrow \mathfrak{D}$: Hausdorff (b) X: regular $\longrightarrow \mathfrak{D}$: regular (c) X: locally compact $\longrightarrow \mathfrak{D}$: locally compact (d) X: 第2可算公理をみたす $\longrightarrow \mathfrak{D}$: 第2可算公理をみたす

(証明) $\mathfrak{D}$: upper semi-continuous $\Longleftrightarrow [\forall D \forall U\,(D \subset U \wedge D \in \mathfrak{D} \wedge U \in \mathfrak{T}) \longrightarrow \exists \mathfrak{D}'\,(V \equiv \bigcup\{D' : D' \in \mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D} \wedge D \subset V \subset U \wedge V \in \mathfrak{T})]$ (*) (φ 2-(77))。$\Longrightarrow \forall A\, \forall U\,(A \subset U^\circ \subset X) \longrightarrow P(A) \subset P(U)^\circ \subset P(\mathfrak{D})$ (但し. $P : X \rightarrow \mathfrak{D}$ なる開写像 φ 2-(78)) (**)   (a) X: Hausdorff; $\forall A \forall B\,(A \neq B \wedge A, B \in \mathfrak{D}) \longrightarrow \exists U, \exists V\,(A \subset U^\circ \wedge B \subset V^\circ \wedge U \cap V = \phi) \longrightarrow \exists \mathfrak{D}' \exists \mathfrak{D}''\,(U' \equiv \bigcup\{D' : D' \in \mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}\} \wedge V' \equiv \bigcup\{D'' : D'' \in \mathfrak{D}'' \subset \mathfrak{D}\} \wedge A \subset U'^\circ \subset U' \subset U \wedge B \subset V'^\circ \subset V' \subset V)$ ($\because$ (*)) $\Longrightarrow P(A) \subset P(U')^\circ \subset P(U') \subset P(\mathfrak{D}) \wedge P(B) \subset P(V')^\circ \subset P(V') \subset P(\mathfrak{D}) \wedge P(U') \cap P(V') = \phi$ ($\because$ (**)) (b) X: regular。 $\forall A \forall \mathcal{U}\,(A \in \mathfrak{D} \wedge \mathcal{U} \subset \mathfrak{D} \wedge P(A) \in P(\mathcal{U})^\circ \subset P(\mathcal{U}) \subset P(\mathfrak{D})) \longrightarrow U \equiv \bigcup\{W : W \in \mathcal{U}\} \wedge A \subset U^\circ \subset U \subset X \longrightarrow \exists V\,(A \subset V^\circ \subset V = V^- \subset U)$ ($\because$ (28). φ K:5.10) $\longrightarrow P(A) \subset P(V)^\circ \subset P(V) \subset P(U) \wedge P(V)$: closed ($\because P$: 閉写像) $\longrightarrow \mathfrak{D}$: regular ($\because$ K:114)。   (c) X: locally compact。 $\forall D\,(D \in \mathfrak{D}) \longrightarrow \exists \mathfrak{D}'\,(D \subset V \equiv \bigcup\{D' : D' \in \mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}\} \wedge V$: compact$)$ ($\because$ (6)) $\longrightarrow P(V)$: compact ($\because P$: 連続 φ (25)) $\wedge P(D) \in P(V)^\circ \subset P(V) \subset P(\mathfrak{D})$。$\longrightarrow \mathfrak{D}$: locally compact。   (d) $\mathcal{B}$: X の位相の可算基 $\longrightarrow \mathcal{U}$ を, $\mathcal{B}$ の有限部分族の和すべての族とすれば, $\operatorname{card} \mathcal{U} = \aleph_0 \Longrightarrow \forall U\,(U \in \mathcal{U}) \longrightarrow U' \equiv \bigcup\{D : D \subset U \wedge D \in \mathfrak{D}\} \longrightarrow \mathfrak{J} \equiv \{U' : U \in \mathcal{U}\} \Longrightarrow \forall U'\,(U' \in \mathfrak{J}) \longrightarrow P(U')$: open ($\because$ (*)) $\Longrightarrow \{P(U')\}$ は, $\mathfrak{D}$ の商位相の基になる [$\because \forall A \forall V\,(A \in \mathfrak{D} \wedge A \subset V^\circ) \longrightarrow \exists \mathcal{B}'\,(A \subset \bigcup\{B' : B' \in \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\} \equiv W \subset V \wedge \operatorname{card} \mathcal{B}' < \aleph_0)$ ($\because A\,(\in \mathfrak{D})$: compact; (*)) $\longrightarrow A \subset W \subset V \wedge W \in \mathfrak{J}$] $\Longrightarrow \mathfrak{D}$: 第2可算公理をみたす. ($\because \{P(U')\}$ は,可算な位相の基である。) ∎

(47) Cor. X: separable $\wedge$ metric (K:151)

$\mathfrak{D}$ (Xの分解): upper semi-continuous

$\forall D(\in \mathfrak{D})$: compact

$\longrightarrow$ $\mathfrak{D}$: Hausdorff $\wedge$ normal $\wedge$ 第2可算公理 $\wedge$ metrizable

(証明) X: separable $\wedge$ (pseudo)metric $\longrightarrow$ X: 第2可算公理をみたす ($\because$ Ⅱ-(106)) $\longrightarrow$ $\mathfrak{D}$: 第2可算公理をみたす ($\because$ (46)) (*)。 X: (pseudo)metric $\longrightarrow$ X: normal ($\because$ Ⅱ-(104)) $\longrightarrow$ $\mathfrak{D}$: normal ($\because$ (46)) (**)。 X: metric $\longrightarrow$ Xのネットは、ただ1点に収束 ($\because$ $d(x,y)=0 \rightleftarrows x=y$ $\wedge$ Ⅱ-(107)) $\longrightarrow$ X: Hausdorff ($\because$ Ⅱ-(22)) $\longrightarrow$ $\mathfrak{D}$: Hausdorff ($\because$ (46)) (***)。 (*) ~ (***) より、$\mathfrak{D}$: metrizable ($\because$ $\mathfrak{D}$: Hausdorff $\longrightarrow$ $\mathfrak{D}$: T_1 & Ⅱ-(115)) ∎

コンパクト化

(48) Def. X^*: $(X, \mathcal{T})$ の1点コムパクト化 (one-point compactification)

$\rightleftarrows$ $X^* = X \cup \{\infty\}$; その位相 $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{U : X^* \sim U\ (\subset X)$: compact $\wedge$ closed$\}$

(49) Th. (Alexandroff)

X^*: Xの1点コムパクト化

$\longrightarrow$ (a) X^*: compact.

(b) XのX^*における相対位相は、$\mathcal{T}$ (K:152 / 梅:220)

(証明) $\mathfrak{F} \equiv \{F : (F \subset X \wedge F$: compact $\wedge$ closed$) \vee (F = \phi)\}$; $\mathcal{T}_\infty \equiv \{O : X^* \sim O \in \mathfrak{F}\}$; $\mathcal{T}^* \equiv \mathcal{T} \cup \mathcal{T}_\infty$ ($\mathcal{T}$の各集合は∞を含まず、$\mathcal{T}_\infty$の各集合は∞を含むことに注意) $\Longrightarrow$ $\forall O\ (O \in \mathcal{T}^*) \longrightarrow O \sim \{\infty\} = O \cap X \in \mathcal{T}$ (*)。 $\Longrightarrow$ $\mathcal{T}^*$は、X^*における位相である。($\because$ (*), (b), (23) より、$\mathcal{T}^*$ は位相の公準をみたす。) $\Longrightarrow$ $(X, \mathcal{T})$は、相対位相をもつ $(X^*, \mathcal{T}^*)$ の部分空間である ($\because$ (*))。 $\forall \mathcal{U}\ (X^* \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U} \subset \mathcal{T}^*\}) \longrightarrow X \subset \bigcup\{U' : U' = U \sim \{\infty\}, U \in \mathcal{U}\} \longrightarrow \mathcal{U}' = \{U'\}$ は、Xの開被覆。一方、$\mathcal{U}$はX^*の開被覆 $\longrightarrow \exists U\ (\infty \in U \in \mathcal{U}) \longrightarrow U \in \mathcal{T}_\infty \longrightarrow X^* \sim U \in \mathfrak{F} \longrightarrow X^* \sim U$ の有限な開被覆 $\mathcal{V}\ (\subset \mathcal{U}')$ がある $\longrightarrow X^* \subset \mathcal{V} \cup \{U\} \subset \mathcal{T}^*$: X^*の有限な

開被覆 $\Longrightarrow$ X^*: compact ∎

(50) Th. (Alexandroff) X^*: Hausdorff

$\rightleftarrows$ X: locally compact $\wedge$ Hausdorff

(証明) (前半) X^*: Hausdorff $\longrightarrow$ $X\ (\subset X^*)$: Hausdorff。(*) $\forall x\ (x \in X) \longrightarrow x \neq \infty \longrightarrow \exists U \exists V\ (U \cap V = \phi \wedge x \in U \in \mathcal{T}^* \wedge \infty \in V \in \mathcal{T}^*)$ ($\because$ X^*: Hausdorff) $\Longrightarrow$ UのX^*における閉包をU_1とおる $\longrightarrow U_1 \cap V = \phi$ ($\because$ Ⅰ-(60)) $\longrightarrow U_1 \subset X \longrightarrow x \in U_1^\circ \subset U_1 \subset X$ (U_1はxのXにおける近傍)。 $\Longrightarrow U_1$: compact ($\because$ X^*: compact ($\because$ (49)) $\wedge$ U_1: closed) $\longrightarrow U_1$は、Xの部分空間としても compact ($\because$ $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$) $\Longrightarrow X$: locally compact (**)。 (*), (**) より。 (後半) $\forall x\ (x \in X) \longrightarrow \exists U\ (x \in U^\circ \subset U \subset X \wedge U$: compact$)$ ($\because$ X: locally compact) $\longrightarrow U$: closed ($\because$ X: Hausdorff & (24)) $\longrightarrow U \in \mathfrak{F} \Longrightarrow \infty \in X^* \sim U = V$: open $\Longrightarrow U, V$ は、$\forall x (\in X)$, ∞ を分離する近傍である $\Longrightarrow X^*$: Hausdorff ∎

(51) Th. X: compact

$\rightleftarrows$ $\infty \notin (X^* \sim \{\infty\})^-$ (∞はX^*の孤立点) (K:152)

(証明) (前半) X: compact $\longrightarrow \{\infty\} \in \mathcal{T}^* \longrightarrow \{\infty\}$: clopen $\longrightarrow \{\infty\} \cap X^- = \phi$ ($\because$ Ⅰ-(59)) $\longrightarrow \infty \notin (X^* \sim \{\infty\})^-$。 (後半) ∞ がX^*の孤立点 $\longrightarrow (X^* \sim \{\infty\})^- = X^* \sim \{\infty\} \longrightarrow X^- = X \longrightarrow X$: closed $\longrightarrow X$: compact ($\because$ X^*: compact, & (23)) ∎

(52) Def. Xのコムパクト化 (compactification) (f, Y)

$\rightleftarrows$ Y: compact

$f : X \to A$, $X \approx f(X)$, $A^- = Y$

(53) Def. (f, Y): Hausdorff

$\rightleftarrows$ Y: Hausdorff

(54) Def. $(f, Y) \geqq (g, Z)$

$\rightleftarrows$ $\exists h : Y \to Z$, continuous, $h \circ f = g$

(55) Def. (f, Y)と(g, Z)とが位相同値 (topologically equivalent)

$\rightleftarrows$ $Y \approx h(Y) = Z$

(56) Th. (f,Y)と(g,Z)とは位相同値 $\longrightarrow (f,Y)\geq(g,Z) \wedge (g,Z)\geq(f,Y)$ (K:153 旧:104)

(証明) h:同相写像(= 連続∧1対1∧開写像) $\longrightarrow h^{-1}: Z\to Y$, 連続 $\wedge\ f = h^{-1}\circ g \longrightarrow (g,Z)\geq(f,Y)$ ∎

(57) Th. Xのコンパクト化の族は、≧によって半順序づけられる。

(証明) $(f,Y)\geq(g,Z)\geq(h,U) \longrightarrow \exists j: Y\to Z,\ \exists k: Z\to U\ (g=j\circ f\ ;\ h=k\circ g) \longrightarrow h=j\circ k\circ f \longrightarrow (f,Y)\geq(h,U) \longrightarrow$ ≧:半順序 (φ K:64) ∎

(58) Th. $(f,Y)\geq(g,Z)\geq(f,Y)$: Hausdorffコンパクト化 $\longrightarrow (f,Y)$と(g,Z)とは位相同値

(証明) $(f,Y)\geq(g,Z) \rightleftarrows g\circ f^{-1}: f(X)\to Z$ が連続拡張 $h: Y\to Z$ をもつ。(*) (前提)$\longrightarrow f\circ g^{-1}, g\circ f^{-1}$ には連続拡張 $j: Z\to Y,\ k: Y\to Z$ をもつ(∵(*)) $\longrightarrow j\circ k: Z\to Z$の, $k\circ j: Y\to Y$の恒等写像(∵Y, Z:Hausdorff) $\longrightarrow (f,Y)$と(g,Z)とはtopologically equivalent ∎

Hausdorffコンパクト化をもつ集合には、極大のコンパクト化が存在する。Stone–Čechコンパクト化がこれである。連続関数 $f: X\to Q$(単位閉区間) のすべてからなる族を、$F(X)$とせよ。$Q^{F(X)}$: compact (∵(31))。評価写像 $e: X\to Q^{F(X)}$ ($e(x)$のf座標は、$f(x)$) は連続写像 (∵f:連続)。X:Tychonoff (∵(34)) $\longrightarrow$ e:同相写像(∵2-(96))。$\beta(X)=\overline{e(X)}$ とおく。

(59) Def. Stone–Čechコンパクト化 $\rightleftarrows (e, \beta(X))$

(60) Lemma $f: A\to B$

$f^*: Q^B\to Q^A\ ;\ f^*(y)=y\circ f\ (y\in Q^B)$

$\longrightarrow f^*$:連続

(証明) $\forall a\in A \Longrightarrow P_a\circ f^*(y) = P_a(y\circ f) = y(f(a))$: 連続(∵K:154) $\Longrightarrow f^*$:連続(∵2-(59)) ∎

(61) Th (Stone–Čech) X: Tychonoff

$f: X\to Y$(compact∧Hausdorff), 連続

$(e, \beta(X))$: Stone–Čechコンパクト化

$\longrightarrow f\circ e^{-1}$ は、$\beta(X)\to Y$への関数に拡張される。

(証明) $f^*: F(Y)\to F(X)$ を、$f^*(a)=a\circ f\ (a\in F(Y))$ で定義。$f^{**}: Q^{F(X)}\to Q^{F(Y)}$ を $f^{**}(g)=g\circ f^*\ (g\in Q^{F(X)})$ で定義。$e: X\to Q^{F(X)},\ g: Y\to Q^{F(Y)}$ なる評価写像とせよ。$\Longrightarrow e$:同相写像。(∵2-(96)) g:同相写像。$\Longrightarrow f^{**}$:連続 (∵(60)) $\Longrightarrow \forall x\forall h\ (x\in X\wedge h\in F(Y)) \longrightarrow (f^{**}\circ e)(x)(h) = (e(x)\circ f^*)(h) = e(x)(h\circ f) = h\circ f(x) = g(f(x))(h) = (g\circ x)(x)(h) \longrightarrow f^{**}\circ e = g\circ f \Longrightarrow g^{-1}\circ f^{**}$ が $f\circ e^{-1}$ の拡張である。∎

Lebesgueの被覆補題

(62) Th. $A(\subset(X,d))$: compact

$\mathcal{U}$: Aの open cover

$\longrightarrow \exists r\forall x\exists U\,(U(x,r)\subset U\wedge x\in A\wedge U\in\mathcal{U})$ (K:156)

(証明) $\{U_i: i\in N\}(\subset\mathcal{U})$ を、Aの有限被覆とする(∵A:compact) $\Longrightarrow f_i(x) = d(x, X\sim U_i)$; $f(x)=\max[f_i(x): i\in N] \longrightarrow f$:連続 $\Longrightarrow f(x)\geq f_i(x) > 0 \Longrightarrow f(A)$: compact (∵A:compact ∧ f:連続 φ(25)) $\Longrightarrow \exists r\forall x\,(f(x)>r\wedge x\in A)$ (∵(33)) $\longrightarrow \exists i\,(f_i(x)>r) \longrightarrow U(x,r)\subset U_i\in\mathcal{U}$ ∎

(63) Cor. $A(\subset(X,d))$: compact

$U: A\subset U^{\circ}$

$\longrightarrow \exists r\forall x\,(U(x,r)\subset U\wedge x\in A)$ (K:159)

(証明) Aの open cover $\mathcal{U}$ を、$A\subset\bigcup\{V: V\in\mathcal{U}\}\subset U$ なるように、とる。$\longrightarrow \mathcal{U}$の有限部分被覆をとり、$\exists r(\forall x(\in A)\to U(x,r)\subset U_i\in\mathcal{U})$ なるように、できる $\longrightarrow d(A, X\sim U)>r>0$ ∎

つぎの定理は、(62)の言いかえである。

(64) Th. $V\equiv\{(x,y): d(x,y)<r,\ x,y\in X\}$

$\longrightarrow V(x)=\{y: (x,y)\in V\} = U(x,r)$

ここで $V\supset\Delta\equiv\{(x,x): x\in X\}$: open を含むことに、注意。つぎのTh.を(62)から導ける。

(65) Th. (X, d) : compact

$\mathcal{U}$: open cover

$\longrightarrow \exists V\, \forall x\, \exists U\, (\Delta \subset V^{\circ} \wedge V(x) \subset U \in \mathcal{U} \wedge x \in X)$ (K;157)

(66) Def. $\mathcal{U}$: 均等被覆 (even cover)

$\rightleftarrows \exists V\, \forall x\, \exists U\, (\Delta \subset V^{\circ} \wedge V(x) \subset U \in \mathcal{U} \wedge x \in X)$

(67) Def $\mathcal{A}$ (任意の集合族) : 閉 (closed)

$\rightleftarrows \forall A\, (\in \mathcal{A})$: closed

(68) Th. $\mathcal{U}$: open cover に, 細分 $\mathcal{A}$: closed $\wedge$ locally finite があるo

$\longrightarrow \mathcal{U}$: even cover

即ち. $\left.\begin{array}{l} X : \text{compact} \wedge \text{regular} \\ \mathcal{U} : \text{open cover} \end{array}\right\} \longrightarrow \mathcal{U}$; even cover

(証明) $\mathcal{A}$: $\mathcal{U}$ の局所有限 (locally finite ケリー(117)) な閉細分 (refinement ケリー(125)) とする。$\Longrightarrow \forall A\, (A \in \mathcal{A}) \longrightarrow \exists U_A\, (A \subset U_A \in \mathcal{U}) \Longrightarrow V_A \equiv (U_A \times U_A) \cup (X \sim A) \times (X \sim A) \longrightarrow V_A$ は Δ の, $X \times X$ における開近傍。$\Longrightarrow \forall x \in A \longrightarrow V_A(x) = U_A \longrightarrow V \equiv \bigcap \{V_A : A \in \mathcal{A}\} \longrightarrow V(x) \subset V_A(x) = U_A \Longrightarrow \{V(x)\}$ は. $\mathcal{U}$ の細分 $\Longrightarrow \forall (x, x) \in \Delta \longrightarrow \exists W$ (W は $\mathcal{A}$ の有限個の要素とだけ交わる) $\Longrightarrow W \cap A = \phi \longrightarrow W \subset X \sim A \longrightarrow W \times W \subset V_A \Longrightarrow V$ は Δ の近傍となる。∎

REFERENCES

Bourbaki, Nicolas 1965 *Éléments de mathématique : topologie générale*, Hermann. =1968 森毅他訳『位相(1)-(5)』, 東京図書.

入江昭二 1957 『位相解析入門』, 岩波書店.

彌永昌吉 & 彌永健一 1977 『集合と位相II』(岩波講座 基礎数学 12), 岩波書店.

Kelley, John L. 1955 *General Topology*, Van Nostrand Co. =1968 児玉之宏訳, 『位相空間論』, 吉岡書店.

児玉之宏 & 永見啓応 1974 『位相空間論』, 岩波書店.

前原昭二 1967 『記号論理入門』, 日本評論社.

松坂和夫 1968 『集合・位相入門』, 岩波書店.

同値 ———— 1

コムパクト性と分離性 ———— 6

コムパクト空間の積 ———— 8

局所コムパクト空間 ———— 10

商空間 ———— 12

コムパクト化 ———— 13

Lebesgueの被覆補題 ———— 16

CN 92 HASHIZUME Daisaburo

1979-2-12

位相空間論(補)

橋爪大三郎

このレジュメは、すでにまとめた「位相空間論」,「位相空間論(2)」,「位相空間論(3)」の内容につづくべき一様空間についての議論を、当座の用に供するため急遽筆録したものです。主に、Kelley[1955=1968], 児玉&永見[1974] にもとづいていますので、より詳しくお知りになりたい方は、そちらを御覧下さい。

*

(1) Def. 集合 X の一様系(uniformity)とは つぎの (a)〜(e)の条件をみたす $X \times X$ の部分集合族 $\mathcal{U}$ である:

(a) $\forall U \in \mathcal{U} \longrightarrow \Delta \subset U$

(b) $\forall U \in \mathcal{U} \longrightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$

(c) $\forall U \in \mathcal{U} \longrightarrow \exists V (V \in \mathcal{U} \wedge V \circ V \subset U)$

(d) $\forall U, V \in \mathcal{U} \longrightarrow U \cap V \in \mathcal{U}$

(e) $\forall U \in \mathcal{U} \wedge U \subset V \subset X \times X \longrightarrow V \in \mathcal{U}$

(2) Def. $(X, \mathcal{U})$: 一様空間 (uniform space)

N.B. $U^{-1} \equiv \{(y,x) : (x,y) \in U\}$ (3) ; $U \circ V \equiv \{(x,z) : (x,y) \in V \wedge (y,z) \in U\}$ (4) ; $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ (5) ; $U[A] \equiv \{y ; \exists x (x \in A \wedge (x,y) \in U\}$ (6) と約束。

(7) Def. $\mathcal{B}$ は 一様系 $\mathcal{U}$ の基(base)である

$\rightleftarrows$ $\forall U \exists B (B \subset U \wedge B \in \mathcal{B} \wedge U \in \mathcal{U})$

(8) Def. $\mathcal{S}$ は 一様系の基 $\mathcal{B}$ の部分基 (subbase)である

$\rightleftarrows$ $\mathcal{B} = \{\bigcap_{i \in I} S_i : S_i \in \mathcal{S}\}$

(9) Def. $\mathcal{T}$ は 一様系 $\mathcal{U}$ の位相(一様位相 uniform topology)である。

$\rightleftarrows$ $\mathcal{T} \equiv \{T : \forall x (x \in T \subset X) \longrightarrow \exists U (U[x] \subset T \wedge U \in \mathcal{U})\}$

(10) Def. 一様空間から一様空間への写像 $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ が $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ に関して一様連続 (uniformly continuous)である。

$\rightleftarrows$ $\exists V \in \mathcal{V} \longrightarrow \{(x,y) : (f(x), f(y)) \in V\} \in \mathcal{U}$

(11) Def. f: 一様同型 (uniform isomorphism)

$\rightleftarrows$ $f : X \to Y$ が 1対1 写像で f, f^{-1} がともに一様連続

N.B. $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ が、一様同型であるとき、2つの空間は一様同値 (uniformly equivalent)という。一様同値な任意の空間のもつ属性を、一様不変性(uniformly invariant)という。

*

(12) Def. 一様空間 $(X, \mathcal{U})$ のネット $\{S_n : n \in D\}$ が Cauchy ネットである。

$\rightleftarrows$ $\forall U \exists N \forall m \forall n (m \geq N \wedge n \geq N \wedge (S_m, S_n) \in U \in \mathcal{U} \wedge N \in D)$

$\rightleftarrows$ ネット $\{(S_m, S_n) : (m,n) \in D \times D\}$ が $\mathcal{U}$ の各要素にほとんど含まれる。

(13) Th. 一様位相に関して、1点に収束する任意のネットは Cauchy ネットである。Cauchy ネットは、その密集点のおのおのに収束する。 (K:195)

(14) Def. 一様空間 $(X, \mathcal{U})$: 完備 (complete)

$\rightleftarrows$ Xの任意の Cauchy ネットが空間内の1点に収束する。

(15) Def. 一様空間 $(X, \mathcal{U})$ の集合族 $\mathcal{A}$ が微小集合 (small sets)を含む

$\rightleftarrows$ $\forall U \exists A \exists x (A \subset U[x] \wedge U \in \mathcal{U} \wedge A \in \mathcal{A} \wedge x \in X)$

(16) Th.
一様空間 $(X,\mathcal{U})$: complete
$\rightleftarrows$ 有限交叉性をもち，微小集合を含む任意の閉集合の族が，空でない共通部分をもつ。 (K:197)

(17) Th.
準距離空間 : complete
$\rightleftarrows$ 任意の Cauchy 列が，1点に収束する (K:197)

(18) Th.
f : compact uniform $\longrightarrow$ uniform : continuous
$\longrightarrow$ f : uniformly continuous (K:202)

*

(19) Def.
(準)距離空間 (X, d) が，全有界 (totally bounded) である。
$\rightleftarrows$ $\forall \varepsilon > 0 \longrightarrow \{U(x,\varepsilon) ; x \in X\}$ が，有限部分被覆をもつ。 (児:56)

N.B. コンパクト距離空間は，つねに全有界である。

(20) Def.
一様空間 $(X, \mathcal{U})$: totally bounded
$\rightleftarrows$ $\forall U \in \mathcal{U} \longrightarrow {}^{\exists}F\,(U[F] = X \wedge \mathrm{card}\, F < \aleph_0)$ (K:202)

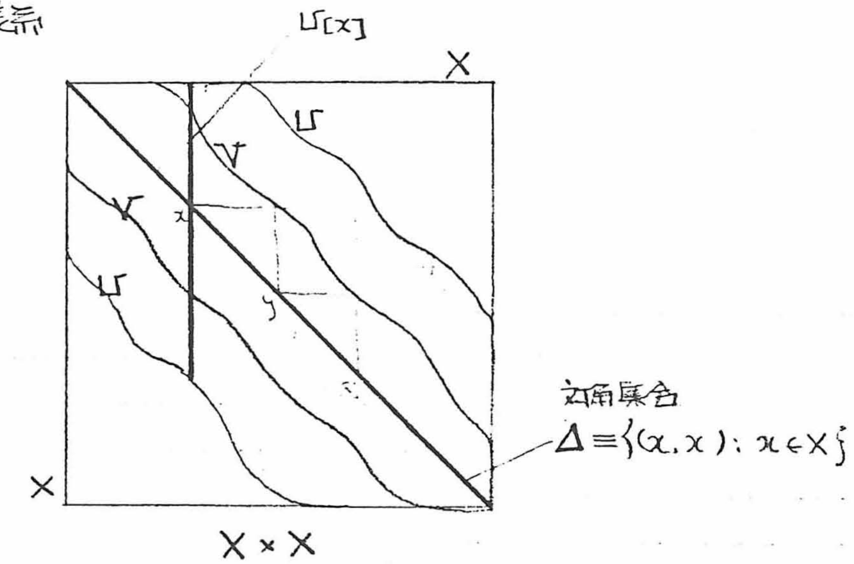
(21) Th.
一様空間 $(X.\mathcal{U})$: totally bounded
$\rightleftarrows$ Xの任意のネットが，Cauchy 部分ネットをもつ。

(22) Cor.
一様空間 $(X,\mathcal{U})$: compact
$\rightleftarrows$ $(X,\mathcal{U})$: totally bounded $\wedge$ complete (児:155) (K:203)

(23) Def.
一様空間 $(X.\mathcal{U})$ の部分集合 A の被覆 $\mathcal{C}$ が，一様被覆 (uniform cover) である。
$\longrightarrow$ $\forall x\, {}^{\exists}U\,(U[x] \subset C \wedge x \in A \wedge C \in \mathcal{C} \wedge U \in \mathcal{U})$

(24) Th.
一様空間のコンパクト部分集合の任意の開被覆は，一様被覆である。 (K:204)

一様系



CN 91 Hashizume, Daisaburo
1979-2-15