統計学を習うひとのための

'79 小室ゼミナール
夏季講座

線型数学 はやわかり *

橋爪大三郎

＊ このレジュメは，線型数学をほとんどはじめて習うひとを念頭において，数理統計学の基礎理論を学ぶための数学的な準備として必要な限りでの内容を，急ぎ足で説明するものです。予備知識はとくに要りません。このレジュメは，本格的な線型空間論ではありませんが，それを暗黙のうちに前提して，組みたてられていますから，将来，線型空間論をマスターすることと，あらかじめ予想しているわけです。機会があればそちらへすすんで下さい。

1 線型空間 …… 2
2 数ベクトルと行列 …… 5
3 行列式と方程式 …… 8
4 固有値と2次形式 …… 12

REFERENCES

(1) 矢野健太郎 1958 『代数学と幾何学』，裳華房．

(2) 古屋 茂 1959 『行列と行列式（新数学シリーズ 5）』，培風館．

(3) Мальцев, А. И. 1956 Основы Линейной Алгебры, Москва, =1978 柴岡泰光訳，『線型代数学』，東京図書．

(4) 三宅敏恒 1961 『経済学のための線型数学（新数学シリーズ 22）』，培風館．

(5) 斎藤正彦 1966 『線型代数入門』，東京大学出版会．

(6) 佐武一郎 1974 『線型代数学』，裳華房．

(7) 柴岡泰光 (ed.) 1965 『マリツェフ 演習線型代数学』，東京図書．

(8) 竹内 啓 1974 『確率 数学 統計 II』，培風館．

(9) 小林竜一 1967 『社会科学のための数学概説』，岩波出版．

(10) Birkhoff, G. & Maclane, S. 1965 A Survey of Modern Algebla, Macmillan, =1967 奥川光太郎・辻吉雄訳，『現代代数学概論 改訂3版』，白水社．

(11) Kelley, J.L., Namioka, I., &c. 1963 Linear Topological Spaces, D. Van Nostrand Co., =1972 村上温夫訳，『線形位相空間論』，吉丸出版．

(12) 橋爪大三郎 1978 『線型空間論』，(résumé)．

1 線型空間

線型数学（linear algebra）は，線型空間を対象とする数学である。では，線型空間（linear space）とは何だろうか？ ひとことでいうと，それは，ベクトルの集合である。ベクトルは，数Bや物理でおなじみと思うが，「幾何ベクトル」とか「数ベクトル」とかいろいろある。線型空間の要素のことを，ベクトル（vector）というのである。だから，線型空間のことを，ベクトル空間といっても同じことである。

念のため，線型空間の公準（ないし，公理 axiom）を，掲げておこう。詳しくは，(6)，(11)，そしてとくに(12)を見てほしいが，ある集合Vが線型空間である，とは，

I a，bがVの要素であれば，a+b もVの要素であって，

(I.1) $(a+b)+c = a+(b+c)$

(I.2) $a+b = b+a$

(I.3) どんなaに対しても，$a+0=a$ となるような0がある

(I.4) どんなaに対しても，$a+(-a)=0$ となるような $-a$ がある。

II ある体Kの要素c（スカラー）をとると，ca はVの要素で，

(II.1) $(cd)a = c(da)$

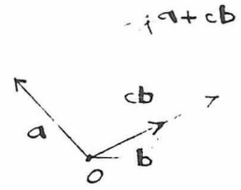
(II.2) $1a = a$

(II.3) $c(a+b) = ca+cb$

(II.4) $(c+d)a = ca+da$

であること、である。（ここで、ベクトルを、スカラーと区別するために、太文字で示してある。また、体（field）というのは、和と積が定義されている集合で、実数体、複素数体、などが代表的である。）線型空間のさまざまな性質はこれらの公理からみちびかれるのであるが、このレポートではこれ以上たちいらないことにしよう。

ある線型空間には、かならず、ある次元（dimension）がそなわっている。次元は無限であってもよいのだが、以下われわれは、有限次元をもつ線型空間だけを考えることにしよう。



平面が2次元であるといわれるのは、適当な点（原点）から（同一直線上にない）2本のベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ を定めると、そのすべての点を、これら $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ のスカラー倍の和（これを、線形結合という）の形で（一義的に）示すことができるから、である。つまり、あるベクトル $\mathbf{c}$ とすれば、

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} \qquad (c_1, c_2 \text{は適当なスカラー})$$

である。$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ をこの空間の基底（base）であるといい、基底となるベクトルの個数が次元である。

ここで、1次独立（もしくは、線型独立 linearly independent）という考え方が重要である。いま、上のベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ($\neq 0$) をとって

$$0 = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} \tag{1-1}$$

という式（1次関係式）をつくると、この式が成立するのは、

$$c_1 = c_2 = 0 \tag{1-2}$$

の場合に限られる。これは、ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ とが互いに1次独立であるからであって、そうでない場合には、たとえば $c_1 \neq 0$ であるから、

$$\mathbf{a} = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{b} \tag{1-3}$$

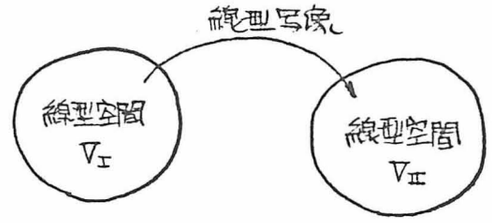
となって、一方のベクトルが他のベクトルの1次結合（もしくは、線型結合 linear combination）としてあらわされてしまう。このような場合には、$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ は1次従属（linearly dependent）なベクトル集合なのである。一般に、n個のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ が1次独立であるとは、一次関係式

$$0 = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n \tag{1-4}$$

が成立するのが、$c_1 = c_2 = \cdots = 0$ なる場合に限られること、である。こう考えると、線型空間の次元とつぎのように言ってもよい――次元とは、その空間で1次独立なベクトルの最大個数のことである。

*

線型空間から線型空間への写像は、線型写像である。（あるいは、おなじことだが、線型空間に対して線型写像をほどこすと、えられるのはやはり線型空間である。）



さて、線型写像とは何だろうか？線型写像（linear map）とは、つぎのような性質をもつものである、すなわち、問題とする、線型空間から線型空間への写像を f とすると、

$$\begin{cases} f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) & (1\text{-}5) \\ f(c\mathbf{a}) = cf(\mathbf{a}) & (1\text{-}6) \end{cases}$$

であること。（ちなみに、上の（1-5）、（1-6）は、

$$f(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n) = c_1 f(\mathbf{a}_1) + c_2 f(\mathbf{a}_2) + \cdots + c_n f(\mathbf{a}_n) \tag{1-7}$$

と、ひとつの式であらわしてもまったく同じである。）

線型写像 f が、V_I から V_{II} のうえへの写像であるなら、V_{II} の次元は、V_I の次元より小さいか、等しいかである。V_{II} の次元が V_I の次元と同じであるなら、線型写像は、1対1写像である。

*

特に内積（inner product）が定義されているような線形空間を、計量ベクトル空間という。この名称の由来は、内積が角度や距離のような計量的な性質をみちびくことに、もとづく。内積の公準そのほか詳しい話は、省略しよう。

2 数ベクトルと行列

(n次元)数ベクトルとは，スカラーとn個並びたものをいう。

$$\begin{pmatrix}3\\-2\\\sqrt{4}\\\vdots\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0\\1\\4\\\vdots\end{pmatrix}\quad\cdots\qquad(2\text{-}1)$$

数ベクトル空間は，線型空間になる。線型空間は，なにも数ベクトル空間に限らないが，すべての線型空間は，適当な数ベクトル空間に表現することができる——このことが重要。だから，線型空間の議論は，すべて，数ベクトル空間の議論に直せる。

数ベクトルの和($a+b$)，スカラー倍(ca)とは，つぎのような手続きである：

$$\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\qquad 3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}\qquad(2\text{-}2)$$

つまり，各要素ごとに和をとり，またスカラー倍すればよい。上のようなベクトルの全体は，3次元ベクトル空間をつくる。零ベクトル(0)は，

$$0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad(2\text{-}3)$$

であり，すべてのベクトルは，互いに1次独立な適当な3本のベクトルの1次結合のかたちで，(1意的に)表現することができる，たとえば，

$$\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad(2\text{-}4)$$

のように。逆ベクトルも，見易いであろう。

(n次元)ベクトル空間から(m次元)ベクトル空間への線型写像には，(m×n)行列が対応する。(m×n)行列(matrix)とは，横m行，縦n列に，スカラーを長方形に並べたものをいう。たとえば，
行列Aが

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\2&2&1\end{pmatrix}\qquad(2\text{-}5)$$

のようにあらわされるなら，この行

列は，3次元数ベクトルを2次元数ベクトルに変換する，線型写像とみなす。たとえば，$a=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ は，この行列Aのあらわす線型写像fによって，$b=f(a)$，

$=Aa$ にうつるが，それは，

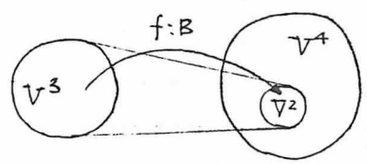
$$b=\begin{pmatrix}3&0&1\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1+0\times2+1\times(-1)\\2\times1+2\times2+1\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\qquad(2\text{-}6)$$

として計算される(ベクトルと行列の，積)。

3次元ベクトル空間V^3の全ての要素は，写像fによって$f(V^3)$の各要素にうつる。このベクトル空間の次元は，3以下であるが，それを，行列Aの階数(rank)という(上の例では，2)。みかけ上次元のより高いベクトル空間への写像とみえる場合，たとえば，

$$B=\begin{pmatrix}3&0&1\\2&2&1\\5&2&2\\1&-2&0\end{pmatrix}\qquad(2\text{-}7)$$

なる場合でも，えられる空間の次元は，3をこえない(この場合，2)。Bは，V^3からV^4のなかへの写像になっているのである。行列の階数は，行列を構成する各行(または列)ベクトルのうち，1次独立なものの最大個数として定義してもかまわない。

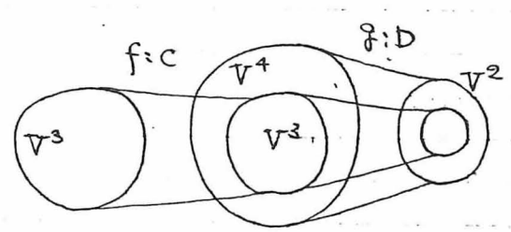


線型写像の合成には，行列の積が対応する。線型写像f，gがそれぞれ，V^nからV^m，V^mからV^ℓのなかへの線型写像であったとすれば，f，gを表現する行列C，Dは，それぞれ，m×n，ℓ×m行列である。たとえば：ℓ=2，m=4，n=3とすれば，

$$C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\\-1&-1&0\end{pmatrix}\qquad(2\text{-}8)$$

$$D=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\qquad(2\text{-}9)$$

のようなかたちになり，合成$f\circ g$に対応する行列の積，$E=D\times C$は，



$$E=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\times1+1\times0+0\times0+1\times(-1) & 0\times0+1\times1+0\times0+1\times(-1) & 0\times1+1\times1+0\times2+1\times0\\ 1\times1+0\times0+1\times0+0\times(-1) & 1\times0+0\times1+1\times0+0\times(-1) & 1\times1+0\times1+1\times2+0\times0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&3\end{pmatrix} \qquad (2\text{-}10)$$

のように計算される。Eは 2×4 行列で、この場合階数は2である。(なお、行列の積は、むやみに定義されていないことに、注意しよう。D×C はいみをもつが、C×D はこの場合いみをもたない。)

*

数ベクトルの内積は、ベクトルの要素であるスカラーの積和で計算される。たとえば、$x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ であるとしよう。内積 (x,y) の値(スカラー)は、

$$(x,y)=1\times0+2\times1+3\times(-1)=-1 \qquad (2\text{-}11)$$

のように計算される。内積が 0 になる場合、ふたつのベクトルは互いに直交する、といい、$x\perp y$ のように書く。また、自分自身との内積の平方根を、ベクトルの長さといい、絶対値記号を使って、$|x|$ のように書く。上の例では、

$$|x|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{1\times1+2\times2+3\times3}=\sqrt{14} \qquad (2\text{-}12)$$

である。

互いに直交するベクトルを基底にとった線型空間を、直交空間という。

*

n次元ベクトル空間 V^n から V^n のなかへの写像は、n×n 行列、すなわち、正方行列 (square matrix) になる。正方行列は、行と列の数が等しいので、単に n次正方行列という。正方行列の階数が n であるとき、すなわち、当該の写像 f による V^n の像 $f(V^n)$ が V^n と一致するとき、その正方行列は、正則行列 (non-singular matrix) という。正則行列は、正則1次変換、すなわち1対1線型写像をあらわしている。正則行列のなかでもとくに、自己同一である写像に対応するもの、単位行列 (unit matrix) という。n次元の単位行列 I^n は、行列の対角成分に1がならび、他の部分に0が並んだ形、すなわち、

$$I^n=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\0&0&0&&1\end{pmatrix} \qquad (2\text{-}13)$$

のような形をしている。

正則行列 P に関して、

$$PQ=QP=I \qquad (2\text{-}14)$$

なる行列 Q がかならずただひとつ存在する。Q を P の逆行列 (inverse matrix) といい、P^{-1} と書く。また、

$$(P^{-1})^{-1}=P \qquad (2\text{-}15)$$

である。(逆行列の計算法については、次節でのべる。)

3 行列式と方程式

行列式 (determinant) は、1次方程式系を解く場合にも、逆行列を計算するにも、欠かせない道具だてであるので、これをまず説明しよう。

2次の行列式は、つぎのように表記し、計算する。

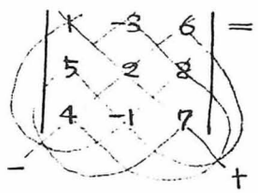
$$\begin{vmatrix}2&1\\1&4\end{vmatrix}=2\times4-1\times1=7 \qquad (3\text{-}1)$$

一般に、2次の行列を $A=(a_{ij})$ と書けば、2次の行列式 $|A|$ は、

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (3\text{-}2)$$

なるスカラーをいみする。

3次の行列式は、つぎのように計算する。



$$=1\cdot2\cdot7+(-3)\cdot8\cdot5+5\cdot(-1)\cdot6-6\cdot2\cdot4-(-3)\cdot5\cdot7-1\cdot(-1)\cdot8$$
$$=14-96-30-48+105+8$$
$$=-47 \qquad (3\text{-}3)$$

ところで、ここでつぎのような重要な性質が成立つことに、注目しよう。すなわち、

$A=(a_{ij})$ において，その行列の要素 a_{ij} の余因子（cofactor）を A_{ij} と表記すれば，

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad (3\text{-}4)$$

なること、である。ただし，余因子 A_{ij} とは，もとの行列 A の，その行と列の要素を除去してつくった小行列式に，$(-1)^{i+j}$ を乗じたもの，という。たとえば，(3-3)で，

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} \quad (=23) \qquad (3\text{-}5)$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \quad (=-11) \qquad (3\text{-}6)$$

の如くである。(3-4) を，Aのその1行に関する余因子展開という。他の行や列で行なっても，さしつかえない。

4次以上の行列式は，余因子展開を使って定義するのが便利で，たとえば4次の行列式 $A=(a_{ij})$ は，その3列によって展開してみれば，

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} \qquad (3\text{-}7)$$

のようであろう。余因子展開を順につかうと，一般に n 次行列式が定義できたことになる。

行列式には，つぎの基本性質が成立つ：

(1) $|A| = |{}^tA|$ (3-8)

（ここで，${}^tA$ とは，行列 $A=(a_{ij})$ の転置（＝行と列とをいれかえること），すなわち，(a_{ji}) をあらわす。）

(2) ある2つの行（または列）を入れ替えると，符号が変わる。

(例) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ (3-9)

(3) 2つの行（または列）の等しい行列式の値は，0である。

(例) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (3-10)

(4) ある行（または列）の各要素を d 倍すれば，行列式は d 倍になる。

(例) $5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5\cdot 1 & 2 \\ 5\cdot 3 & 4 \end{vmatrix}$ (3-11)

(5) ある行（または列）の要素がみな2数の和であれば，行列式の値は，和の各項をその行（または列）においてできる2つの行列式の値の和になる。

(例) $\begin{vmatrix} 1 & 2+0 & 3 \\ 2 & 3+4 & 0 \\ 4 & 5+1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (3-11)

(6) ある行（または列）をスカラー倍して別の行（または列）に加えても，行列式の値は不変である。

(例) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (3-12)

A を正方行列としよう。A が正則行列であるなら，$|A| \neq 0$，A が正則行列でないなら，$|A| = 0$ である。

行列式の基本性質 (3) から，つぎのような，余因子展開に関する重要な性質がみちびける——ある行（または列）の余因子を，それと別の行（または列）の要素で展開すると，値は0になる，すなわち，

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \qquad (i \neq j) \qquad (3\text{-}13)$$

例をあげよう。(3-9) 式を左辺3行の余因子を3行の要素で展開してみると，

$$0\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 + (-3) + (-1)(-3)$$

$$= 0 \qquad (3\text{-}14)$$

この性質を用いると，正則行列 $A=(a_{ij})$ の逆行列 A^{-1} は，つぎのように書けることがわかる，すなわち，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & \cdots & A_{n1}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & \cdots & A_{n2}/|A| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}/|A| & A_{2n}/|A| & \cdots & A_{nn}/|A| \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}15)$$

実際，$AA^{-1} = A^{-1}A = E^n$ なることが，計算によって容易にたしかめられよう。（ここで明らかに，$|A| \neq 0$。また，A^{-1} は，$A=(a_{ij})$ の各要素の余因子を転置した行列 (A_{ji}) をつくり，それをさらに $|A|$ で除したものである。

*

つぎに，連立1次方程式 (system of linear equations) について考えよう。連立1次方程式は，数ベクトル空間上の線型変換として扱うことができる。たとえば，つぎのような連立方程式

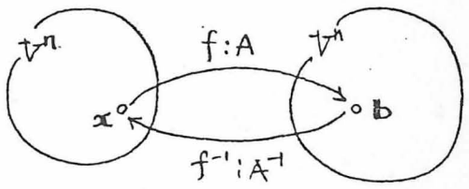
$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+3y+4z=8 \\ -x+y-3z=2 \end{cases} \tag{3-16}$$

をといて，$x=3, y=2, z=-1$ をうることができるが，これを行列を使って

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{3-17}$$

と書きかえることができる，すなわち，$x=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ なるベクトルが，$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ なる変換によって，$b=\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ に写像された，というように考えるのである。

$A=(a_{ij})$ を，n次正方行列，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を，未知数のベクトル，$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ を，定数のベクトルとしよう。すると，Aは，V^n から V^n (のなか) への写像であって，



$$Ax=b \tag{3-18}$$

のようにおけば，n元連立一次方程式をあらわすことができる。いま，(簡単のため) Aが正則行列になるとき (すなわち，$|A|\neq 0$ の場合) を考えよう。すると，Aには，逆行列 A^{-1} が存在するから，これを (3-18) の左からかけて，

$$A^{-1}Ax=A^{-1}b \tag{3-19}$$

すなわち：

$$x=A^{-1}b \tag{3-20}$$

のかたちに解けるだろう。ここで，A^{-1} が (3-15) の形にあらわせることをおもいだす。すなわち，

$$A^{-1}b=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} b_i A_{in} \end{pmatrix} \tag{3-21}$$

のように書けよう。ここで，$\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}$ $(j=1,\cdots,n)$ は，行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{j}{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3-22}$$

のj列を展開したものになっている。だから求める未知数 x_j は，

$$x_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{j}{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Big/ |A| \tag{3-23}$$

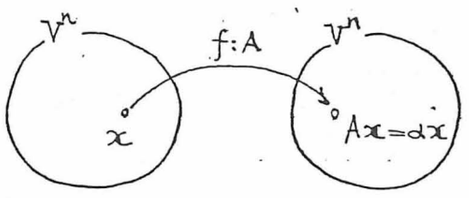
として一意的に解くことができるのである。さきの (3-16) の例でためしにyを求めてみると，

$$y=\begin{vmatrix} 1 & \overset{2}{4} & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12/-6 = 2 \tag{3-24}$$

のようである。このような解法を，Cramerの公式による解法という。($|A|=0$ のとき，さらには，Aが正方行列でないなどの一般の場合は，議論がややこみいってくるので，ここでは割愛する。(6), (12) 等をみよ。)

4 固有値と2次形式

V^n から V^n (のなか) への線型写像fは，ベクトル x を $f(x)$ へうつすけれども，この写像fは，V^n のなかのある一群のベクトルに関しては，その「方向」を変えない，という性質がある。そこで，この写像fを，n次正方行列Aによって



表現するならば、いまのべた性質はつぎの方程式であらわされるはずである：

$$Ax=\alpha x \qquad (4-1)$$

ここで、αは、Aによってきまるスカラーであるが、これを行列Aの固有値（characteristic value）という。Aには固有値がいくつかあるのがふつうだが、その1つα_iに対して、(4-1)式を成立させるxを、固有値α_iに対応する固有ベクトル（characteristic vector または固有根）という。固有値が定まれば、固有ベクトルを計算することができる。

固有値α_iを求めるには、(4-1)を変形して、

$$(A-\alpha I)x=0 \qquad (4-2)$$

としてみれば、前節でのべた方程式論の帰結から明らかなように、

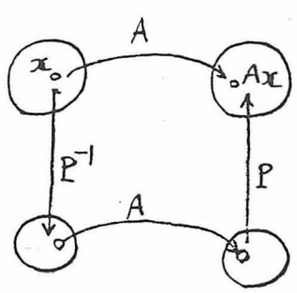
$$|A-\alpha I|=0 \qquad (4-3)$$

なることが、$x\neq 0$なる固有根があるための条件になっている。（さもないと、(4-2)式がCramerの公式で解けてしまって、$x=0$という自明な解だけしかこられないことになろう。）(4-3)式は、書きくだせば

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\alpha & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\alpha \end{vmatrix}=0 \qquad (4-4)$$

となることから判るように、未知数αに関するn次多項式を含む方程式になっている。そこで、(4-3)、(4-4)を、Aの固有方程式（characteristic equation）とよぶ。代数学の基本定理により、この方程式は（重根を含め）n個の根をもつ。固有方程式を解いて固有値をえたなら、そのそれぞれを(4-1)に代入するなりして、固有ベクトル（空間）が定まる。計算例については、省略するので、各テキスト（(2)、(5)、(8)ほか）をみてほしい。

固有値はある線型写像に固有の性質であるから、その同じ写像に正則変換をほどこしてAの表現を与えても、固有値は不変である。すなわち、Aの固有値と$P^{-1}AP$の固有値とは、一致する。



この特別な場合として、つぎの重要な事実がある——n次実対称行列Aの固有値$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$はすべて実数である。また、Aに適当な（実）直交行列をかけて、Aを、固有値を対角要素とするような対角行列のかたちに、すなわち、

$$T^{-1}AT={}^tTAT=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad (4-5)$$

のようにすることができる。（対称行列とは、${}^tA=A$（$a_{ij}=a_{ji}$）なる行列であり、実行列とは、要素である各スカラーが実数である行列である。また、直交行列では、$T^{-1}={}^tT$なる関係がある。）

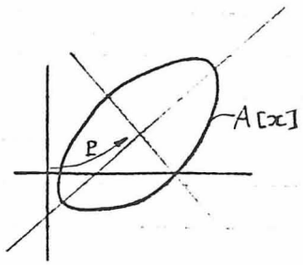
*

$x^2+2xy+y^2$とか、$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$とかいうような形の、2次同次多項式を、2次形式（Quadratic Form）という。2次形式は一般に、n次対称行列Aと、n次列ベクトルxとを用いて、${}^txAx$と書けるが、これを$A[x]$と表記することもある。2次形式の性質を調べるには、対称行列Aの性質を考察すればよい。

2次形式${}^txAx$に、一次変換$x=Py$（Pは適当な正則行列）を施すと、新しい2次形式${}^tyP^{-1}APy$をうる（$P^{-1}AP$は対称行列）。すべての2次形式は、適当な1次変換によって、標準形（normal form）に直すことができる。標準形とは、Aの階数をrとすれば、

$${}^tyP^{-1}APy=\alpha_1y_1^2+\alpha_2y_2^2+\cdots+\alpha_ry_r^2 \quad (\alpha_i\neq 0) \qquad (4-6)$$

のような形のものである。ここで、rや、$\alpha_1\sim\alpha_r$のうち正負のものの個数は、対称行列Aに固有にきまっていて、正則変換では変化しない。これを、符号数（signature）という。



ここから、2次形式の正負に関する、重要な帰結がみちびかれる——2次形式${}^txAx$が、任意の実ベクトルxに関して${}^txAx>0$（正定）であるための条件とは、Aの階数がnで、その固有値$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$がすべて正なることであり、それは、Aのすべての首座小行列式$|A^{(k)}|=\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{i_ki_1} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}>0$ $(k=1,n)$なることである。負値定符号の場合には、この条件は、$(-1)^k|A^{(k)}|>0$ $(k=1,n)$と変わる。

CN 88	HASHIZUME, Daisaburo	1979-7-14