位相空間論（2）

橋爪 大三郎

このレジュメでは、先の『位相空間論』にひきつづき、主として Kelley [1955=1968] に依拠しながら、位相空間の基本的な諸性質を扱かう。目次は、末尾に掲げた。文献は、次回のレジュメに回し、今回は省略した。ただしこのレジュメでは、次の略号を用いる。

(エ)	:	橋爪『位相空間論』	(B)	:	Bourbaki [1965=1968]
(K)	:	Kelley [1955=1968]	(児)	:	児玉＆永見 [1974]
(弥)	:	彌永＆彌永 [1977]	φ	:	推論の出所

＊

まず、いわゆる Moore-Smith の収束（Convergence）をテーマとしよう。この議論の目的は、収束の概念でもって、空間の位相を説明することである。これは、理論構成の上から興味ぶかいばかりでなく、解析学との関連からも、重要であろう。解析学の基礎は、極限であり、列の収束であるのだから。収束と位相とは、切ってもきれない関係にある。ある列が収束するかどうかは、位相のとり方（そしてまた、順序のとり方）に左右されるのである。

基本的な用語は、つぎのようである。

(1) 列（sequence）：非負の整数の集合 ω の上で定義された、関数。

(2) 実数列：値域が、実数集合の部分集合になっている、列。

(3) $S(n)$ または S_n：列 S の、n における値。

(4) Def　列 S が集合 A に含まれる（S は A の列である）

$$\rightleftarrows \forall n (S_n \in A \wedge n \in \omega)$$

(5) Def.　列 S が集合 A にほとんど（eventually）含まれる（S はほとんど A の列である）

$$\rightleftarrows \exists m \forall n [(n \geq m \rightarrow S_n \in A) \wedge n, m \in \omega]$$

(6) Def.　列 S が集合 A に無限に（frequently）含まれる（S はほとんど A の列ではない）

$$\rightleftarrows \forall m \exists n (n \geq m \wedge S_n \in A \wedge n, m \in \omega)$$

(7) Def.　T は S の部分列（subsequence）である。

$$\rightleftarrows \forall i [T_i = S_{N_i} \wedge N_i \in \omega \wedge \exists n \forall m (i \geq n \rightarrow N_i \geq m)]$$

列 S の収束は、S が ω のどんな関数か、ということばかりでなく、ω の順序 $\geq$ にも関係している。そこで、列を対 $(S, \geq)$ と表記すれば、

(8)
$$\{S_n : n \in \omega, \geq\} = (S, \geq)$$
$$\neq (S, \leq)$$

単に S の収束というときには、$(S, \geq)$ の収束をいう。

有向集合とネット

位相空間における収束を考えるには、ネットの概念を与えることが、重要である。

(9) Def.　2項関係 $\geq$ が集合 D を方向づける（direct）

$$\rightleftarrows D \neq \phi \wedge (a) \wedge (b) \wedge (c)$$

(a) $\forall m \forall n \forall p \ (m, n, p \in D \wedge m \geq n \wedge n \geq p \rightarrow m \geq p)$

(b) $\forall m \ (m \in D \rightarrow m \geq m)$

(c) $\forall m \forall n \exists p \ (m, n \in D \rightarrow p \geq m \wedge p \geq n \wedge p \in D)$

(10) 有向集合（directed set）：対（pair）$(D, \geq)$

(11) ネット（net）：S が関数で、その領域が $\geq$ で方向づけられているような対 $(S, \geq)$

(12) ネット $(S|D, \geq) = \{S_n, n \in D, \geq\}$

ネットについても、列の場合と同様（cf (4)～(6)）、（ほとんど、ないし、無限に）A に含まれる、という。

(13) Def.　$E \ (\subset D)$ が共終（cofinal）である。

$$\rightleftarrows \forall m \exists p \ (p \geq m \wedge p, m \in E)$$

(14) Th.　ネット $\{S_n, n \in D, \geq\}$ が無限に A に含まれる $\rightarrow$ 集合 $E = \{n ; S_n \in A\}$ は共終である。

（証明）　仮定 $\rightleftarrows \forall m \exists p \ (p \geq m \wedge S_p \in A \wedge m, p \in D)$

$\rightleftarrows \forall m \exists p \ (p \geq m \wedge p \in E \wedge m \in D)$

$\rightarrow \forall m \exists p \ (p \geq m \wedge p, m \in E)$　　（$\because E \subset D$）

$\rightleftarrows$ 結論 ∎

(15) Th.　有向集合 D の、任意の共終な部分集合は、再び有向集合である

（証明）　共終な部分集合を $E (\subset D)$ とする。$\rightarrow$ E において、(9)-(a), (b) は成立つ。
(c) をいう。共終 $\rightarrow \forall m \exists p \ (p \geq m \wedge p, m \in E) \wedge \forall n \exists p \ (p \geq n \wedge p, n \in E)$

$\rightleftarrows \forall m \forall n \exists p\,(m, n \in E \to p \geq m \land p \geq n \land p \in E) \equiv$ (c) ∎

(16) Th. (a) ネット $\{S_n,\ n \in D,\ \geq\}$ が無限に集合Aに含まれる。

$\rightleftarrows$ (b) Dのある共終な部分集合が，Aに写像される。

$\rightleftarrows$ (c) そのネットが、ほとんど $X \sim A$ に含まれない。

(証明) (a)→(b) をいう。 $E \equiv \{n;\ S_n \in A\} \subset D$ とする。→ Eは共終 (∵(14))。→ $\{S_n,\ n \in E,\ \geq\} \subset A$。　(b)→(a) をいう。 Dのある共終な部分集合をFとする。→ $\forall m \exists p\,(p \geq m \land p, m \in F)$ (∵(13)) → $\forall m \exists p\,(p \geq m \land S_p \in A \land p, m \in F)$ → $\forall m \exists p\,(p \geq m \land S_p \in A \land p, m \in F)$ $\rightleftarrows$ (a) (∵Fは有向集合←(15))。また(a)と(c)とは双対。∎

位相空間 $(X, \mathcal{T})$ における ネット $(S, \geq)$ の収束は，関数S. 位相$\mathcal{T}$. 順序≥. に関係する。

(17) Def. ネット $(S, \geq)$ が $\mathcal{T}$ に関して. 点 s に収束する。

$\rightleftarrows \forall U_i (s \in U_i \in \mathcal{U}_s \subset \mathcal{T}) \to \exists m \forall n [(n \geq m \to S_n \in U_i) \land m, n \in D]$

(そのネットが: sの任意の$\mathcal{T}$近傍に, ほとんど含まれる。)

集合の集積点の集合, 閉包，空間の位相を，収束のことばで説明できる。

(18) Th (K:65)

(a) 点sがA $(\subset X)$ の集積点である。

$\rightleftarrows$ sに収束する $A \sim \{s\}$ のネットが存在する。

(b) 点sがA $(\subset X)$ の閉包に属す。

$\rightleftarrows$ sに収束する, Aに含まれるネットが存在する。

(c) A $(\subset X)$ が閉集合

$\rightleftarrows$ いかなるネットも. $X \sim A$ の点に収束しない。

(証明) 位相空間においては, 1点の近傍系は⊂で, 方向づけられる。また, 集合の有限部分集合すべての族は⊃で方向づけられることに注意。

(a)(前半) 仮定 $\Rightarrow \forall U_i (s \in U_i \in \mathcal{U}_s) \to \exists S_{U_i} [S_{U_i} \in U_i \cap (A - \{s\})]$。 $\mathcal{U}_s$は, sの近傍系で, ⊂で方向づけられている。そこで ネット $\{S_{U_i};\ U_i \in \mathcal{U}(s),\ \subset\}$ をつくるなら, それは s に収束する。(後半) $A \sim \{s\}$ でのネットが sに収束する → ネットは, sの各近傍と交わる。∎

(b)(前半) $s \in A^- \subset X$ → $s \in A$ かまたは, sはAの集積点。(A^- は, Aの閉包) $s \in A$ なら. $\{S_i = s,\ \geq\}$ なる, Aに含まれるネットが確かにsに収束。sが集積点なら, そこに収束するネットがある (∵(18)-(a))。(後半) Aに含まれるネットが, sに収束する → sの任意の近傍に, Aの点が属す → sは, Aの閉包の点。

(c) Aが閉集合 $\rightleftarrows A^- = A$ (Φ I-(19), (22)) $\rightleftarrows$ Aのネットが収束する

なら, 全てAの点である。(∵(18)-(b)) $\rightleftarrows$ いかなるネットも, $X \sim A$ の点に収束しない。∎

位相のとり方により, Aに含まれるネットは, 複数の点に収束しうる。例えば, 密着位相 $(\mathcal{T} = \{X, \phi\})$ では Xのネットは空間の任意の点に収束する。

位相を制限するには, 位相にある制約を加えなければならない。これが, 分離公理 (separation axiom) の役割である。分離公理は. さまざまであって. それぞれ特徴ある位相空間を構成する。児玉&永見【1974:27】から紹介しよう。

(19) Def. $(X, \mathcal{T})$ に対して, 次の公理を考える。

T_0: $\forall x \forall y\,(x, y \in X,\ x \neq y) \to \exists U_x (y \notin U_x) \lor \exists U_y (x \notin U_y)$

(これを, Kolmogorov の分離公理といい, T_0をみたす空間をKolmogorov空間または T_0空間という。)

T_1: $\forall x \forall y\,(x, y \in X,\ x \neq y) \to \exists U_x (y \notin U_x) \land \exists U_y (x \notin U_y)$

(これを, Fréchetの分離公理といい, T_1をみたす空間を, Fréchet空間または T_1空間という。)

T_2: $\forall x \forall y\,(x, y \in X,\ x \neq y) \to \exists U_x \exists U_y (U_x \cap U_y = \phi)$

(これを, Hausdorffの分離公理といい, T_2をみたす空間を, Hausdorff空間または T_2空間という。)

T_3: $\forall x \forall F\,(x \in X \sim F \in \mathcal{T}) \to \exists U_x \exists V_F (U_x \cap V_F = \phi)$

(これをみたす空間を 正則空間 (regular space) という。T_1とT_3を同時にみたすなら, T_3空間という。なお, V_Fは Fの近傍 (↳(79))。

T_4: $\forall F \forall H\,(F \cap H = \phi \land X \sim F \in \mathcal{T} \land X \sim H \in \mathcal{T})$

$\longrightarrow \exists U_F \exists V_H (U_F \cap V_H = \phi)$

(これをみたす空間を, 正規空間 (normal space) という。T_1とT_4とを同時にみたすなら, T_4空間という。)

T_5: Xの任意の部分空間は, T_4をみたす。

(これをみたす空間を, 全部分正規空間 (completely normal space) または, 継承的正規空間 (hereditarily normal space) という。T_1, T_5を同時にみたすなら, T_5空間という。)

T_6: T_4をみたし, Xの任意の閉集合が G_δ集合である。 (児:36)

(これをみたす空間を, 完全正規空間 (perfectly normal space) という。T_1とT_6をみたす空間を, T_6空間という。ただし.

(20) Def. G_δ集合： Xの可算箇の開集合の共通部分

分離公理を強弱の順に並べると，次のようである。

(21) $T_1+T_5 \Rightarrow T_1+T_4 \Rightarrow T_1+T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0 \Rightarrow T$

(22) Th. 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ が Hausdorff 空間（T_2空間）である。
$\Longleftrightarrow$ 空間の各ネットはたかだか (at most) 1点に収束する。

（証明）（前半）$X: T_2 \Longrightarrow \forall x \forall y\,(x, y \in X, x \neq y) \to \exists U_x \exists U_y\,(U_x \cap U_y = \phi)$
$\Longrightarrow$ ひとつのネットが，同時にこの U_x, U_y にほとんど含まれることは，できない。（後半）対偶を証明する，すなわち，Hausdorff空間でないなら，異なる2点に収束することがあることをいう。仮定 $\Longrightarrow \exists s \exists t\, \forall U_s \forall U_t\,[U_s \cap U_t \neq \phi \wedge U_s \in \mathcal{U}_s \wedge U_t \in \mathcal{U}_t] \Longrightarrow \mathcal{U}_s \times \mathcal{U}_t$ の上で，s と t に収束する，あるネットを作ることができる。（$\hookrightarrow$ (K:66)）∎

Hausdorff空間 $(X, \mathcal{T})$ でネットが s に収束するとき，

(23)
$$\mathcal{T}\text{-}\lim \{S_n, n \in D, \geq\} = s$$
$$\lim \{S_n, n \in D, \geq\} = s$$
$$\lim_n S_n = s$$

などと書く。

有向集合の直積を方向づけて，有向積集合 (product directed set) をつくることができる。実際，$(D, \geq)$, $(E, \succ)$ があったなら，$D \times E$ には

(24) $(d, e) \gg (f, g) \rightleftarrows d \geq f \wedge e \succ g$

なる2項関係をつくればよい。

一連の有向集合族 $D_\alpha, \cdots$ の積集合 D を考えよう。

(25) $D \equiv \mathsf{X}\{D_\alpha : \alpha \in A\}$

ただし，各 D_α $(\alpha \in A)$ は $\geqq_\alpha$ でもって方向づけられている。D の要素 d, e の間に

(26) $d \geq e \rightleftarrows d_\alpha \geqq_\alpha e_\alpha \quad (\alpha \in A)$

なる積順序 $\geq$ を定義すると，D は $\geq$ で方向づけられている。（実際にたしかめてみよ）

特別の場合として，すべての D_α，すべての $\geqq_\alpha$ が同一である場合がある。このとき積集合は，A から D への全ての関数の集合 D^A となる。

二重極限定理 (theorem of iterated limits) の成立をいおう。D が有向集合，E_m が，D の各 m に対する有向集合，F が，

(27) $F = D \times \mathsf{X}\{E_m : m \in D\}$

なる積集合，R が F の要素 (m, f) に対して，$R(m, f) = (m, f(m))$

なるものとする。$\forall m \forall n\,(m \in D, n \in E_m) \longrightarrow S(m, n) \in X$ ならば，$\lim_m \lim_n S(m, n)$ が存在するときには，$S \circ R$ はそこに必ず収束する。

（証明）$\lim_m \lim_n S(m, n) = s \in X \to \exists U\,(U \in \mathcal{U}_s \subset \mathcal{T})$。$F$ の任意の点 (p, g) に対し $(p, g) \geq (m, f) \longrightarrow S \circ R(p, g) \in U$ となるような，F の点 (m, f) をみつけよう。まず，$\forall p\,(p \geq m \longrightarrow \lim_n S(p, n) \in U)$ となる m を，D からえらぶ。つぎに，こうした p に対して，$\forall n\,(n \geq f(p) \longrightarrow S(p, n) \in U)$ となる $f(p) \in E_p$ を，えらぶ。他方，$p \geq m$ でない p に対しては，$f(p)$ は E_p の適当な要素ということにしておく。こうして，ネット R をつくれば，$(p, g) \geq (m, f) \longrightarrow p \geq m \longrightarrow \lim_n S(p, n) \in U$ であって，$S \circ R(p, g) = S(p, g(p)) \in U$ でもある。だから，ネット $S \circ R$ は，s に収束することになる。∎

部分ネットと密集点

(28) Def. ネット $\{T_m : m \in E\}$ がネット $\{S_n : n \in D\}$ の部分ネット (subnet) である。
$\rightleftarrows$ 関数 $N: E \to D$ があって，(a), (b) をみたす：
(a) $T = S \circ N \quad (\rightleftarrows \forall i\,(i \in E \wedge T_i = S_{N_i}))$
(b) $\forall n \exists m\,[(p \geq m \longrightarrow N_p \geq n) \wedge m \in E \wedge n \in D]$

(29) Th. ネット S がほとんど A に含まれる $\longrightarrow$ S の部分ネット $S \circ N$ もまたほとんど A に含まれる。（K:69）

（証明）仮定 $\to \forall n \exists l\,[(n \geq l \to S_n \in A) \wedge n, l \in D]$（$S_l$ から先のネットは A に含まれる）$\longrightarrow$ その l に対して，$\exists m\,[(p \geq m \to N_p \geq l) \wedge m \in E]$ であって，T_m から先のネットは，S_l から先のネットの部分ネットになる。よって A に含まれる。∎

(30) Th. 有向集合 D の，任意の共終な部分集合 E は，同じ順序で方向づけられ，$\{S_n ; n \in E\}$ は，S の部分ネットとなる。(K:69)

（証明）E は，やはり有向集合（∵ (15)）。ここで，ネット $\{S_n ; n \in E\}$ に関し，(a) の成立は明らか。共終であることから，(b) も成立する。（∵ (13)）∎

(31) Lemma
S: $\{S_n : n \in D\}$
$\mathcal{A}$: $\forall A_1 \forall A_2\,(A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A} \wedge A_1, A_2 \in \mathcal{A})$
S は $\mathcal{A}$ の任意の要素に，殆ど含まれる
$\longrightarrow$ $\mathcal{A}$ の任意の要素に殆ど含まれる，S の部分ネットがある。

（証明）$\mathcal{A}$ は $\subset$ で方向づけられる（∵ (9)）。ここで，つぎのように，E を定義する：

(32) $E=\{(m,A): m\in D,\ A\in\mathcal{A},\ S_m\in A\}$

Eは、$D\times\mathcal{A}$ の積順序によって、有向づけられる。[∵ $\forall(m,A),\forall(n,B)\in E\longrightarrow\exists(p,C)$ $(C\subset A\cap B\wedge C\in\mathcal{A}\wedge p\geqq m\wedge p\geqq n\wedge S_p\in A\wedge p\in D)\to(p,C)\in E;\ (p,C)\gg(m,A),(p,C)\gg(n,B)$]。関数 $N:E\to D$ を、$N(m,A)=m$ と定めるなら Nは単調で、NはDで共終となる。(∵ (14)) $\Longrightarrow$ $S\circ N$は、Sの部分ネットである。また、$S\circ N$はほとんどAに含まれる。[∵ $\forall A\forall m\forall B\forall n\,[A\in\mathcal{A}\wedge S_m\in A\wedge m\in D\wedge(n,B)\gg(m,A)]\to S\circ N(n,B)=S_n\in B\subset A$] ∎

(33) Def. $s\,(\in X)$がネットSの密集点 (cluster point) である。

$\Longleftrightarrow \forall U\forall m\exists n\,(n\geqq m\wedge S_n\in U\in\mathcal{U}_s\wedge m,n\in D)$

(Sが、sの各近傍に無限に含まれる。)

(34) Th. $s\,(\in X)$がネットSの密集点である。

$\Longleftrightarrow$ Sのある部分ネットが、sに収束する。

(証明)(前半) sのすべての近傍からなる族を、$\mathcal{U}$とすると、$\forall U_1\forall U_2\,(U_1\cap U_2\in\mathcal{U}\wedge U_1,U_2\in\mathcal{U})$であり、$S$は$\mathcal{U}$の各要素に、無限に含まれる(∵(33))。$\longrightarrow$ ほとんど$\mathcal{U}$の各要素に含まれるSの部分ネットが存在する(∵ (31)) $\longrightarrow$ その部分ネットは、sに収束する。(後半) $\longrightarrow$ Sのある部分ネットは、sの各近傍にほとんど含まれる(∵ (17))。$\longrightarrow$ その部分ネットはsの各近傍に無限に含まれる $\longrightarrow$ Sは、sの各近傍に無限に含まれる。$\longrightarrow$ sは密集点。∎

ネット $S=\{S_n,\ n\in D\}$, とし、集合 $A_n=\{S_m;\ n\leqq m\in D\}$ とする。

(35) Th. sが ネットSの密集点である。

$\Longleftrightarrow \forall n\,(s\in\bar{A_n}\wedge n\in D)$

(証明)(前半) $\to\forall n\forall U\,(A_n\cap U\neq\emptyset\wedge U\in\mathcal{U}_s\wedge n\in D)\to\forall n\,(s\in\bar{A_n}\wedge n\in D)$

(後半) 対偶をいう。sが密集点でない $\to\exists m\forall n\exists U\,(n\geqq m\wedge S_n\notin U\in\mathcal{U}_s\wedge m,n\in D)$ $\to\exists m\exists U[(n\geqq m\longrightarrow A_n\cap U=\emptyset)\wedge U\in\mathcal{U}_s\wedge m,n\in D]\longrightarrow s\notin\bar{A_n}$ ∎

列と部分列

ネットではなく列で位相を語るなら、全てのネットに、固定した領域が 2ωいて便利であるけれども、列には特有な、一般化しにくい性質もそなわっている。

第1可算公理(各点の近傍系は、可算基をもつ)をみたす空間では、ネットを列におきかえても、ほぼこれまでの結果が成立する。

(36) Th Xが第1可算公理をみたす位相空間ならば、

(a) sが Aの集積点である。

$\Longleftrightarrow$ sに収束する $A\sim\{s\}$ の列がある。

(b) $A\in\mathcal{T}$

$\Longleftrightarrow$ Aの点に収束するどの列も、ほとんどAに含まれる。

(c) sが列Sの密集点である。

$\longrightarrow$ sに収束するSの部分列がある。

(証明)(a)(前半) 第1可算公理をみたす $\to$ sの近傍系の基 $U_1,\cdots,U_n,\cdots$ をとれる。$\to V_1,\cdots,V_n,\cdots$ $(V_n=\bigcap\{U_k: k\leqq n\})$も近傍系の基である (∵(K:48)) $\longrightarrow$ $V_{n+1}\subset V_n\ (n\in\omega)\longrightarrow S_n\in V_n\cap(A\sim\{s\})\ (n\in\omega)$なる$S_n$を、順にえらぶ $\longrightarrow\{S_n;\ n\in\omega\}$は、$s$に収束する列。(後半) (∵ (8)-(a))

(b)(前半) $A\in\mathcal{T}\rightleftarrows\forall x\exists U\,(x\in U\in\mathcal{U}_x\wedge x\in A)$ (∵(1)-(8)) $\longrightarrow$ Aの点sに収束する列は、そのsのある近傍に、ほとんど含まれる。(後半) 対偶をいう。$A\notin\mathcal{T}\longrightarrow X\sim A$の集積点$s$で、$A$に属すものがある (∵ (11)-(8)-(iii)) $\longrightarrow$ $X\sim A$の列で $s\in A$に収束するものがある(∵(a)) $\longrightarrow$ この列は、Aにほとんど含まれない。

(c) (a)と同様 $V_{n+1}\subset V_n\ (n\in\omega)$となる近傍系の基をとる。$\longrightarrow\exists N_i\forall i[(N_i\geqq i\longrightarrow S_{N_i}\in V_i)\wedge i\in\omega]\longrightarrow\{S_{N_i};\ i\in\omega\}$は、$s$に収束する部分列。∎

収束の議論はさらに収束類へとすすむが、(K:72-75)に任せ、ここでは、つぎに、積空間、商空間に話を移したい。これらはいずれも、ある位相空間から、新らしい位相空間をつくり出す工夫である。

まず、準備として、関数の連続性を定義し、説明する。

連続関数

(37) Def. 関数 $f:(X,\mathcal{T})\longrightarrow(Y,\mathcal{U})$ が $\mathcal{T}$-$\mathcal{U}$連続 (continuous) である。

$\Longleftrightarrow \forall U\,(f^{-1}(U)\in\mathcal{T}\wedge U\in\mathcal{U})$

つぎの関係は、(37)と双対である。

(38) $\Longleftrightarrow \forall U\,(X\sim f^{-1}(Y\sim U)\in\mathcal{T}\wedge Y\sim U\in\mathcal{U})$

連続性は、値域・領域双方の位相に関係している。

(39) Th. $f: X\to Y,\ g: Y\to Z$ がそれぞれ連続
$\longrightarrow$ $g\circ f: X\to Z$ は連続

(証明) $(g\circ f)^{-1}(V) = f^{-1}[g^{-1}(V)] \in \mathcal{J}$ (∵ $g^{-1}(V)\in\mathcal{U}$) ∎

(40) Th. $f: X\to Y$, $A\subset X$
$\longrightarrow$ f は A 上で連続

(証明) A上で連続とは、Aに制限された f が、Aの相対位相に関して連続となることを言っている。$f^{-1}(U)\in\mathcal{J} \longrightarrow (f|A)^{-1}(U) = f^{-1}(U)\cap A \in \mathcal{J}\cap A$ ∎

(41) Th. $f: X\to Y$ に関して、次の条件は同値である。

(a) f: 連続

(b) 開集合の原像は開集合 (☞(38))

(c) Yの位相の部分基の各要素の逆像が開集合

(d) $\forall x\,\forall U_{f(x)}\,[f(x)\in U_{f(x)}\in\mathcal{U}_{f(x)} \wedge f^{-1}(U_{f(x)})\in\mathcal{U}_x]$

(e) $\forall x\,\forall U_{f(x)}\,\exists U_x\,[f(x)\in U_{f(x)}\in\mathcal{U}_{f(x)} \wedge f(U_x)\subset U_{f(x)}]$

(f) ネット S が $s\in X$ に収束する $\longrightarrow$ $f\circ S$ は、$f(s)$ に収束する。

(g) $\forall A\,(f(A^-)\subset f(A)^- \wedge A\in X)$

(h) $\forall B\,(f^{-1}(B)^-\subset f^{-1}(B^-) \wedge B\in Y)$

(証明) (b) (└→(38)) (c) Yの位相の部分基を $\mathcal{B}$ とする。(前半) f: 連続 $\Longrightarrow \mathcal{B}\subset\mathcal{U} \to f^{-1}(\mathcal{B})\subset\mathcal{J}$。(後半) $\forall V\,(V\in\mathcal{U})\to V=\bigcup\{\bigcap\{B_i: B_i\in\mathcal{B}, i\in N\}\}\to f^{-1}(V) = \bigcup\{\bigcap\{f^{-1}(B_i): B_i\in\mathcal{B}, i\in N\}\}\to f^{-1}(V)\in\mathcal{J}$ (∵ $f^{-1}(B_i)\subset\mathcal{J}$) → f 連続。 (a)→(d) $\forall x\,\forall U_{f(x)}(f(x)\in U_{f(x)}\in\mathcal{U}_{f(x)})\to\exists O_{f(x)}(f(x)\in O_{f(x)}\subset U_{f(x)} \wedge O_{f(x)}\in\mathcal{U})\to x\in O_x\equiv f^{-1}(O_{f(x)})\subset f^{-1}(U_{f(x)})\wedge O_{f(x)}\in\mathcal{J}$ (∵(37)) $\to f^{-1}(U_{f(x)})\in\mathcal{U}_x$。 (d)→(e) (d)での $f^{-1}(U_{f(x)})$ が V である。

(e)→(a) (☞(児:30)) $\forall U(U\in\mathcal{U})\Longrightarrow\forall x\,\exists V_x(x\in f^{-1}(U)\wedge x\in V_x\in\mathcal{J}\wedge f(V_x)\subset U)$ (∵(e)) $\Longrightarrow V=\bigcup\{V_x: x\in f^{-1}(U)\}\to V=f^{-1}(U)\in\mathcal{J}$。

(e)→(f) s に収束する X のネット $S\equiv\{S_n: n\in D\}$。$\forall U_{f(s)}(f(s)\in U_{f(s)})\to\exists V_s(s\in V_s\wedge f(V_s)\subset U_{f(s)})$ (∵(e)) $\to f\circ S\equiv\{f(S_n): n\in D\}$ は、ほとんど $U_{f(s)}$ に含まれる (∵ Sはほとんど V_s に含まれる。) $\longrightarrow$ $f\circ S$ は、$f(s)$ に収束する。

(a)→(g) (☞(児:30)) $A\subset f^{-1}(f(A)^-)$。右辺は閉 (∵(38))。$\longrightarrow A^-\subset f^{-1}(f(A)^-)$
$\longrightarrow f(A^-)\subset f(A)^-$。

(g)→(h) $A=f^{-1}(B)\longrightarrow f(A^-)\subset f(A)^-$ (∵(h)) $\subset f[f^{-1}(B)]^- = B^- \longrightarrow A^-\subset f^{-1}(B^-)\longrightarrow f^{-1}(B)^-\subset f^{-1}(B^-)$。

(h)→(b) $\forall B\,(Y\setminus B\in\mathcal{U})\longrightarrow f^{-1}(B)^-\subset f^{-1}(B^-)$ (∵(h)) $= f^{-1}(B)\longrightarrow X\setminus f^{-1}(B)\in\mathcal{J}$。∎

(42) Def. $f: X\to Y$ が、点 x で連続である (continuous at a point x)。
$\Longleftrightarrow \forall U_{f(x)}(f^{-1}(U_{f(x)})\in\mathcal{U}_x \wedge U_{f(x)}\in\mathcal{U}_{f(x)})$

(43) Th. f: 連続
$\Longleftrightarrow$ f は、領域の各点において連続。

(44) Def. $f: X\to Y$ が 位相同型(=同相)写像 (homeomorphic mapping) または 位相写像 (topological mapping) である。
$\Longleftrightarrow$ f が X から Y の上への 1:1 写像であって、f も f^{-1} も連続である。

(45) Def $X\approx Y$ (XとYとが 位相同型 (homeomorphic) である。)
$\Longleftrightarrow$ $f: X\to Y$ なる、位相同型写像が存在する。

(46) Th. f, g が位相同型写像 $\longrightarrow$ $g\circ f$ も位相同型写像

(47) Th. 位相空間族は、位相同型写像によって、位相同値な同値類にわけられる。

位相空間の性質は、その空間の任意の位相同型 (homeomorph) がその性質を保つなら、位相不変性 (a topological invariant) という。

積空間

(48) Def. 位相空間族 $(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ の直積 $X = \times\{X_\alpha: \alpha\in A\}$ に対して、積位相 $\mathcal{U}$ を与えたものを、積空間 (product space) $(X,\mathcal{U})$ という。

(49) Def. 積位相 (product topology) とは、つぎのように作る:
$P_\alpha: X\to X_\alpha$ を、射影とする。

(50) $\mathcal{B}' \equiv \{P_\alpha^{-1}(U_\alpha): U_\alpha\in\mathcal{U}_\alpha, \alpha\in A\}$

(51) $\mathcal{B}\equiv\bigcap_{i\in I}\{B_i': B_i'\in\mathcal{B}'\}$ ($\mathcal{B}'$ の有限個の要素の共通部分)

(52) $\mathcal{U}\equiv\bigcup\{B_j: B_j\in\mathcal{B}\}$

$\mathfrak{B}$は位相の基であり，$\mathfrak{B}'$は部分基である。$\mathfrak{B}$は実際，基であるための条件をみたしている。(↳ (II:40))

(53) Def. $f: X\to Y$ が開写像

$\Longleftrightarrow U\in\mathcal{J}\longrightarrow f(U)\in\mathcal{U}$

(54) Def. $f: X\to Y$ が閉写像

$\Longleftrightarrow X\sim V\in\mathcal{J}\longrightarrow Y\sim f(V)\in\mathcal{U}$

(55) Th. 射影 $P_\alpha: X\longrightarrow X_\alpha$ は，開写像である。

(証明) (見:49)によれば，自明である。(K:91)により，各自試みよ。■

(56) Def. 箱位相 (box topology) $\mathcal{V}$ とは，つぎのようにつくる。

(57) $\mathfrak{B}''\equiv\{\cap\{P_\alpha^{-1}(U_\alpha): \alpha\in A\}: U_\alpha\in\mathcal{U}_\alpha\}$

(58) $\mathcal{V}\equiv\cup\{B_j'': B_j''\in\mathfrak{B}''\}$

明らかに，$\mathcal{U}\subset\mathcal{V}$。ふつう積空間といえば，積位相を伴うもののことである。

射影 P_α は，連続である。(もともと，積位相は，そのように拵えてある。)

(59) Th. $f: X_\alpha\longrightarrow X$ 連続

$\Longleftrightarrow P_\alpha\circ f$: 連続

(証明)(前半) f: 連続 $\longrightarrow P_\alpha\circ f$: 連続 (∵(39)) (後半) $P_\alpha\circ f$: 連続 $(\alpha\in A)$ $\Rightarrow\forall U(U\in\mathcal{U}_\alpha)\to(P_\alpha\circ f)^{-1}(U)\in\mathcal{U}_\alpha\Rightarrow f^{-1}(P_\alpha^{-1}(U))\in\mathcal{U}_\alpha\Rightarrow f^{-1}(V)\in\mathcal{U}_\alpha$, $(V\in\mathcal{U})\Rightarrow f$: 連続。■

(60) Th. 積空間のネット S が，s に収束する。

$\Longleftrightarrow X_\alpha$ $(\alpha\in A)$ での S の射影が，s の射影に収束する。

(証明)(前半) 射影 P_α は，連続である。$\Rightarrow S\equiv\{S_n: n\in D\subset X\}$ が s に収束する。$\longrightarrow P_\alpha(S)\equiv\{P_\alpha(S_n): n\in D\}$ が $P_\alpha(s)$ に収束する。(∵ (KI-41)) (後半) ネット S の射影 $P_\alpha(S)$ $(\alpha\in A)$ が，$P_\alpha(s)$ に収束する。$\Rightarrow\exists U_\alpha(P_\alpha(s)\in U_\alpha$; $P_\alpha(S)$ は U_α にほとんど含まれる$)\longrightarrow S$ は $P_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ に，殆ど含まれる。$\Rightarrow S$ は，$\bigcap_{\alpha\in A}\{P_\alpha^{-1}(U_\alpha)\}$ にほとんど含まれる。$\Rightarrow S$ は s に収束。■

この収束は座標ごとの収束 (coordinatewise convergence) または点ごとの収束 (pointwise convergence) という。

各座標空間(因子空間)が性質 P をもつとき，積空間も性質 P をもてば，P は，乗法性 (productive property) とよばれる。因子空間の個数により，有限乗法性，可算乗法性，などという。

(61) Th. Hausdorff 空間の積は，Hausdorff 空間である。

(証明) $\forall x\forall y(x,y\in X=\times\{X_\alpha:\alpha\in A\}\wedge x\neq y)\longrightarrow\exists\alpha\exists U_x\exists U_y(P_\alpha(x), P_\alpha(y)\in X_\alpha\wedge P_\alpha(x)\in U_x\wedge P_\alpha(y)\in U_y\wedge U_x\cap U_y=\emptyset)\longrightarrow P_\alpha^{-1}(U_\alpha x)\cap P_\alpha^{-1}(U_\alpha y)=\emptyset$ ■

(62) Th. 各 X_α $(\alpha\in A)$ が，第1可算公理をみたすとすれば，(a) ⟺ (b)

(a) $X=\times\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ が，第1可算公理をみたす

(b) 可算個を除くすべての X_α が，分離しない位相をもつ

(証明) (b)→(a) $B(\subset A)$: 可算部分集合，X_α $(\alpha\in A\sim B)$ は分離しない位相をもつとする。$\forall x(x\in X)\Rightarrow\forall\alpha\exists\mathcal{U}_\alpha(P_\alpha(x)=x_\alpha\wedge\mathcal{U}_\alpha$ は x_α の近傍系の可算基 $\wedge\alpha\in A)$ ↳ $\alpha\in A\sim B$ であれば：$\mathcal{U}_\alpha=\{X_\alpha\})\Rightarrow\mathfrak{B}'\equiv\{P_\alpha^{-1}(U_\alpha): U_\alpha\in\mathcal{U}_\alpha, \alpha\in A\}=\{P_\alpha^{-1}(U_\alpha): U_\alpha\in\mathcal{U}_\alpha, \alpha\in B\}\cup\{X_\alpha:\alpha\in A\sim B\}\longrightarrow\mathfrak{B}'$ は，x の近傍系の，可算基になっている。 (a)→(b) 対偶をいう。$B(\subset A)$: 非可算集合 $\wedge\forall\alpha\exists V_\alpha(\alpha\in B\wedge x_\alpha\in V_\alpha\subsetneqq X_\alpha\wedge V_\alpha\in\mathcal{U}_\alpha)\wedge\mathfrak{B}$: $x\in X$ の近傍系の可算基 と仮定。$\Longrightarrow\forall U(U\in\mathfrak{B})\to U(\in\mathcal{U})$ は，積位相 $\mathcal{U}$ を定義する基の要素を1つ含む $\Longrightarrow\alpha\in A$ の有限個をのぞいて，$P_\alpha(U)=X_\alpha$ である。$\Rightarrow B$ は可算だから，$\exists a\forall U(a\in B\wedge U\in\mathfrak{B}\wedge P_a(U)=X_a)\Longrightarrow\exists\alpha\exists V_\alpha\forall U(x_\alpha\in V_\alpha\in\mathcal{U}_\alpha\wedge P_\alpha(U)\not\subset V_\alpha)\Longrightarrow$ 人 (積位相の定義に反す)。■

(63) Th. 積空間 X が Hausdorff $\longrightarrow X_\alpha$ が Hausdorff

(64) Th. 積空間が，各点で可算局所基をもつ。

$\longrightarrow X_\alpha$ も，各点で可算局所基をもつ。

位相空間は永らく点列の収束によって研究されてきたが，点列の収束によっては，位相を満足に記述することはできない。

商空間

$f: X\to Y$ が与えられており，Y の位相が $\mathcal{U}$ であるとき，X の位相 $\mathcal{J}$ を適当にえらべば，f を連続関数とすることができる。たとえば，$\mathcal{J}$ が離散位相でもよい。しかし，重要なのは，次の位相である。

(65) Th. f が，X から $(Y,\mathcal{U})$ への関数である

$\longrightarrow \mathcal{T} \equiv \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ は f を連続にする, Xの最小の位相

(証明) (𝒯が位相なること) $\forall f^{-1}(U_1)\in\mathcal{T} \wedge \forall f^{-1}(U_2)\in\mathcal{T} \longrightarrow f^{-1}(U_1)\cap f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1\cap U_2)\in\mathcal{T}$ (∵ $U_1\cap U_2\in\mathcal{U}$). また, $\forall f^{-1}(U_i)\in\mathcal{T}\longrightarrow \bigcup_i f^{-1}(U_i)\in\mathcal{T}$ (fが連続なること) $\forall U(U\in\mathcal{U})\longrightarrow f^{-1}(U)\in\mathcal{T}$ (最小なること) fを連続にする任意の位相を𝒯'として, $\mathcal{T}\not\subset\mathcal{T}'$ と仮定 $\longrightarrow \exists f^{-1}(U)\,[f^{-1}(U)\notin\mathcal{T}'\wedge U\in\mathcal{U}] \longrightarrow \exists U(f^{-1}(U)\notin\mathcal{T}'\wedge U\in\mathcal{U})$ $\longrightarrow$ f:不連続 $\longrightarrow$ 人 ■

商空間は, これと同じような考え方によっている。

(66) Def. Xに同値関係Rがあって, Xが素な同値類 $R(x)$ にわけられたとき, $Y = X|R \equiv \{R(x) : x\in X\}$ を, XのRによる商集合 (quotient set) という。 (中(見:4))

(67) Def $f: X\longrightarrow X|R$ を, 標準射影 (canonical projection) という。 (中(児:51))

(68) Def. $(X, \mathcal{T})$ に対して, $\mathcal{U}\equiv\{f^{-1}(U) ; U\in\mathcal{T}\}$ と定めた $Y=X|R$ の位相を, Rによる商位相 (quotient topology) といい, Yを, Rによる商空間 (quotient space) という。 (中(児:100))

標準射影fは, Yの商位相に関して, 連続になる(∵(65))。商位相は fを連続とする, もっとも強い位相である。

(69) Def. : $f: X\longrightarrow Y$ が位相空間 $(X, \mathcal{T})$ から, 位相空間 $(Y, \mathcal{U})$ の上への写像であるとき, $U\in\mathcal{U}\rightleftarrows f^{-1}(U)\in\mathcal{T}$ であるなら, fを, 商写像 (quotient mapping) という。

商写像は連続であるが, 連続写像は必ずしも商写像ではない。Yが商空間であれば, 標準射影は商写像である。

(70) Th. $f: X\longrightarrow Y = X|R$ の上への, 標準射影, $g: Y\longrightarrow Z$ とすると,
gが連続 $\rightleftarrows$ $g\circ f$ が連続 (中(B:26))

(証明) (前半) 自明 (∵(39)) (後半) X, Y, Z の位相を, $\mathcal{U}_X, \mathcal{U}_Y, \mathcal{U}_Z$ とかく。
$\forall U(U\in\mathcal{U}_Z)\longrightarrow (g\circ f)^{-1}(U)\in\mathcal{U}_X$ (∵ $g\circ f$ が連続) $\longrightarrow f^{-1}(g^{-1}(U))\in\mathcal{U}_X$ $\longrightarrow g^{-1}(U)\in\mathcal{U}_Y$ (∵(68)) $\longrightarrow$ g:連続 ■

商空間の性質の, さらにすすんだ内容については, たとえば Bourbaki [1965=1968: 26f] を

みよ。

(71) Th. $f: X\longrightarrow Y=X|R$ の上への標準射影とすると, (a)〜(c)は同値。

(a) fは, 開写像

(b) $A\in\mathcal{U}_X\longrightarrow R(A)\in\mathcal{U}_X$

(c) $X\sim B\in\mathcal{U}_X \longrightarrow S\equiv\bigcup\{C: C\subset B\wedge C\in X|R\}$ のとき $X\sim S\in\mathcal{U}_X$

(a)(b)(c)を, 開⇄閉 としても, 同等である。(∵双対) (中(K:97))

(証明) (a)→(b) $\forall A\subset X \longrightarrow R(A)\equiv\{y : \exists x(x\in A\wedge (x,y)\in R)\} = f^{-1}(f(A))$
$A\in\mathcal{U}_X\longrightarrow f(A)\in\mathcal{U}_Y$ (∵(a)) $\longrightarrow f^{-1}(f(A))\in\mathcal{U}_X$ (∵ f:連続)。(b)→(a)
$\forall A\in\mathcal{U}_X\to R(A)\in\mathcal{U}_X \Rightarrow f^{-1}(f(A))\in\mathcal{U}_X \Rightarrow f(A)\in\mathcal{U}_Y$ (f:連続) $\Rightarrow$ f:開写像. (b)→(c) $S\equiv\bigcup\{C: C\subset A\wedge C\in X|R\} = X\sim R(X\sim B)$ (∗) に注意。
$X\sim B\in\mathcal{U}_X\longrightarrow R(X\sim A)\in\mathcal{U}_X$ (∵(b)) $\longrightarrow X\sim S\in\mathcal{U}_X$ (∵(∗))。(c)→(b)
$X\sim B\in\mathcal{U}_X\to X\sim S = R(X\sim B)$ (∵(∗)) $\in\mathcal{U}_X$ (∵(c)) において, $B=X\sim A$ を代入すれば, $A\in\mathcal{U}_X\longrightarrow R(A)\in\mathcal{U}_X$ ■

位相空間Xが属性Pをもつとき, その商空間YもPをもつなら, Pは除法的 (divisible) であるという。除法的な性質は, そう多くない。

(72) Def 順序対の集合 R が 積空間 $X\times X$ で閉集合である。

$$\rightleftarrows \begin{cases} \forall x\forall y(x,y\in X\wedge (x,y)\notin R) \\ \longrightarrow \exists W(W\in\mathcal{U}_{X\times X}\wedge (x,y)\in W\wedge W\cap R=\phi) \end{cases}$$

(73)
$$\rightleftarrows \begin{cases} \forall x\forall y(x,y\in X\wedge (x,y)\notin R) \\ \longrightarrow \exists U\exists V\forall p\forall q(x\in U\in\mathcal{U}_X\wedge y\in V\in\mathcal{U}_X\wedge p\in U\wedge q\in V\wedge (p,q)\notin R) \end{cases}$$

(証明) (72)→(73) $U=\{z:(x,z)\in W\wedge (x,z)\notin R\}$, $V=\{z:(y,z)\in W\wedge (y,z)\notin R\}$ とすればよい。(73)→(72) $W=U\times V$ とおけばよい。■

(74) Th. 商空間 $X|R$ が Hausdorff
$\longrightarrow$ Rは, $X\times X$ の閉集合

(証明) $f: X\to X|R$, $X|R$: Hausdorff $\Longrightarrow \forall x\forall y((x,y)\notin R)\to f(x)\neq f(y)$ $\Longrightarrow \exists U\exists V(f(x)\in U\in\mathcal{U}_{X|R}\wedge f(y)\in V\in\mathcal{U}_{X|R}\wedge U\cap V=\phi)$ (∵Hausdorff) $\Longrightarrow$ $f^{-1}(U), f^{-1}(V)\in\mathcal{U}_X\wedge f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=\phi$ (∵f:連続) $\Longrightarrow (x,y)\in f^{-1}(U)\times f^{-1}(V)\in\mathcal{U}_{X\times X}$, $f^{-1}(U)\times f^{-1}(V)\cap R=\phi$ $\Longrightarrow$ Rは, $X\times X$ で閉集合。(∵(73)) ■

(75) Th. $f: X\longrightarrow X|R$ が, 開写像, Rが $X\times X$ の閉集合

$\longrightarrow X|R$: Hausdorff

(証明) $\forall f(x) \forall f(y)\,(f(x) \neq f(y) \wedge f(x), f(y) \in X|R) \Longrightarrow (x, y) \notin R \Longrightarrow$
$\exists U \exists V \forall p \forall q\,(p \in U \wedge q \in V \wedge (p, q) \notin R \wedge x \in U \in \mathcal{U}_x \wedge y \in V \in \mathcal{U}_x)$ (∵(73)) $\Longrightarrow$
$\exists f(U) \exists f(V)\,(f(x) \in f(U) \in \mathcal{U}_{X|R} \wedge f(y) \in f(V) \in \mathcal{U}_{X|R} \wedge f(U) \cap f(V) = \emptyset)$ (∵(63)) ∎

(76) Def　　$\mathcal{D}$ は、位相空間 $(X, \mathcal{T})$ の分解 (decomposition) である。

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{D} = \{D_i : \emptyset \neq D_i \subset X \wedge X \subset \cup\{x : x \in D_i \in \mathcal{D}\}$
$\wedge D_i \cap D_j = \emptyset\ (i \neq j) \wedge X \sim D_i \in \mathcal{T}\}$
(児;171)

(77) Def.　　$(X, \mathcal{T})$ の分解 $\mathcal{D}$ が上半連続 upper semi-continuous

$\Longleftrightarrow$ $\forall D_i \forall U \exists V\,[D_i \subset V \subset U \wedge U, V \in \mathcal{T} \wedge D_i \in \mathcal{D}$
$\wedge V = \cup\{D_j : D_j \subset V \wedge D_j \in \mathcal{D}\}]$

(78) Th.　　$(X, \mathcal{T})$ の分解 $\mathcal{D}$ が上半連続

$\Longleftrightarrow$ $f : X \to \mathcal{D}$ が、閉写像

(証明)(後半) f:閉写像 $\Longrightarrow \forall U \in \mathcal{T} \to \cup\{C : C \subset U \wedge C \in \mathcal{D}\} \in \mathcal{T}$ (∵(71)-(c)) $\Longrightarrow$
$\mathcal{D}$:上半連続 (∵(77))　(前半) $\mathcal{D}$:上半連続 $\forall U \in \mathcal{T}, V = \cup\{D_j : D_j \subset U \wedge D_j \in \mathcal{D}\}$
$\Longrightarrow \forall x \in V \to \exists D\,(x \in D \subset U \wedge D \in \mathcal{D}) \Longrightarrow \exists W\,(W = \cup\{D_j : D_j \subset W \subset U \wedge D_j \in \mathcal{D}\}$
$\wedge W \in \mathcal{T})$ (∵(77)) $\Longrightarrow x \in W \subset V \Longrightarrow V \in \mathcal{T}$ (∵ II-(40)-(ii)) $\Longrightarrow f$:閉写像 (∵(71)) ∎

連続関数の存在

つぎに、しばらくのあいだ距離空間を主題として位相空間との関係を考えよう。位相空間において実数値連続関数を構成するための、一連のLemmaを証明する。

Lindelöf空間とは、任意の開被覆が可算部分被覆をもつ空間（参. II-(49)）、正則空間とは、各点 x とその近傍 U に対して、$x \in V \subset U$ なる開近傍 V が存在する空間、正規空間とは、任意の閉集合 A, B $(A \cap B = \emptyset)$ に対して、$A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$ なる開集合 U, V が存在する空間、であった。(L,(19))

(79) Def　　U は、集合 A の近傍である $\Longleftrightarrow A \subset U^\circ$

ただし、U° は、U の内点の集合である。

(80) Def.　　集合族 $\mathfrak{B}_A$ は、集合 A の近傍系の基である。

$\Longleftrightarrow$ A の任意の近傍が、$\mathfrak{B}_A$ のある要素を含む。

(81) Th.　　空間 X が正規 (normal) である。

$\Longleftrightarrow$ 閉集合 A の閉近傍の族 $\mathfrak{B}_A$ は、A の近傍系の基となる。(K;114)

(証明)(前半) $\forall W\,(A \subset W^\circ = X \sim (X \sim W)^-$ (∵児;22) $\wedge A = A^-) \Longrightarrow A \cap X \sim W^\circ = \emptyset \Longrightarrow$
$\exists U \exists V\,(A \subset U \wedge X \sim W^\circ \subset V \wedge U \cap V = \emptyset \wedge U, V \in \mathcal{T}) \Longrightarrow \exists B\,(A \subset B \subset W \wedge B = U^- \wedge$
$B \in \mathfrak{B}_A)$　(後半) $\forall A \forall B\,(A \cap B = \emptyset \wedge X \sim A \in \mathcal{T} \wedge X \sim B \in \mathcal{T}) \Longrightarrow A \subset X \sim B$ は、A
の近傍 $\Longrightarrow \exists W\,(A \subset W \subset X \sim B \wedge W \in \mathfrak{B}_A) \Longrightarrow A \subset W^\circ \wedge B \subset X \sim W \wedge W^\circ \cap X \sim W$
$= \emptyset$ (W°, $X \sim W$ は、それぞれ A, B の開近傍) $\Longrightarrow X$:正規 ∎

(82) Th.　　空間 X が正則 (regular) である。

$\Longleftrightarrow$ $\forall x \forall U\,(x \in U \in \mathcal{T}) \longrightarrow \exists V\,(x \in V \in \mathcal{T} \wedge V^- \subset U)$

(証明)(前半) (19)-T2 : $\forall x \forall A\,(x \in X \sim A \in \mathcal{T}) \to \exists U_x \exists U_A\,(x \in U_x^\circ \wedge A \subset U_A^\circ \wedge U_x$
$\cap U_A = \emptyset)$ (*)。(82)の前提をみたす開集合 U をとり、$A = X \sim U$ とおく $\Longrightarrow \exists U_x \exists U_A$
(∵(*)) $\Longrightarrow U_x \subset X \sim U_A \longrightarrow U_x^- \subset (X \sim U_A)^- = X \sim U_A$。また、$A \subset U_A \to X \sim U_A$
$\subset X \sim A = U \to U_x^- \subset U \Longrightarrow \exists V\,(V = U_x^-)$　(後半) $\forall x \forall A\,(x \in X \sim A \in \mathcal{T}) \Longrightarrow$
$U = X \sim A$ とおくと、$x \in U \in \mathcal{T} \to \exists V\,(x \in V \in \mathcal{T} \wedge V^- \subset U)$ (∵(82)) $\Longrightarrow U_A = X \sim V^-$
とおくと、$A = X \sim U \subset X \sim V^- = U_A$ であって、$V \cap U_A = \emptyset \Longrightarrow \exists U_x\,(U_x = V)$
$\Longrightarrow$ (*) ∎ (参(松;225))

(83) Lemma　　正則なLindelöf空間は、正規である。

(証明) $\forall A \forall B\,(A \cap B = \emptyset \wedge A = A^- \wedge B = B^-) \Longrightarrow \forall x \exists U_n\,(x \in U_n \wedge U_n^- \cap B = \emptyset \wedge$
$x \in A) \wedge \forall y \exists V_n\,(y \in V_n \wedge V_n^- \cap A = \emptyset \wedge y \in B)$ (∵(19)-T3) $\Longrightarrow \exists \mathcal{U} = \{U_n ; U_n \cap B = \emptyset$
$\wedge \cup\{U_n\} \supset A\} \wedge \exists \mathcal{V} = \{V_n : V_n \cap A = \emptyset \wedge \cup\{V_n\} \supset B\}$。また、$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \{X \sim (A$
$\cup B)\}$ は、X の被覆 $\Longrightarrow A, B$ をそれぞれ被覆する列 $\{U_n ; n \in \omega\}, \{V_n ; n \in \omega\}$
が存在する (∵Lindelöf) $\Longrightarrow U_n' = U_n \sim \cup\{V_p^- : p \leqq n\}$, $V_n' = V_n \sim \cup\{U_p^- : p \leqq n\}$
とおく。$m \leqq n$ ならば、$U_n' \cap V_m = \emptyset$ (つくり方より) $\longrightarrow U_m' \cap V_m' = \emptyset$ (∵ $V_m' \supset V_m$) $\Longrightarrow$
$\forall n \forall m\,(U_n' \cap V_m' = \emptyset) \Longrightarrow \cup\{U_n' : n \in \omega\} \cap \cup\{V_m' : m \in \omega\} = \emptyset \Longrightarrow A, B$ を
含む、交わらない開集合が存在する $\Longrightarrow X$:正規 (∵(19)-T4) ∎

(84) Th.　　第2可算公理をみたす正則空間は、正規である。

(証明) 第2可算公理をみたす $\Longrightarrow$ 可算被覆をもつ、すなわち、Lindelöf空間である (∵ II-(48))。これと、正則なることより、正規である。(∵(83)) ∎

(85) Lemma　D：正の数の，稠密な部分集合，$t\in D$，$F_t\subset X$

$t<s \rightarrow F_t\subset F_s$

$\bigcup\{F_t : t\in D\}=X$

$f(x)=\inf\{t : x\in F_t\}$，$s\in R$（実数）

$\longrightarrow$ ① $\{x : f(x)<s\}=\bigcup\{F_t : t\in D\wedge t<s\}$ $\wedge$

② $\{x : f(x)\leqq s\}=\bigcap\{F_t : t\in D\wedge t>s\}$

（証明）① $\{x : f(x)<s\}=\{x : \inf\{t : x\in F_t\}<s\}$（∵仮定）$=\bigcup\{F_t : t\in D\wedge t<s\}$（∵ $\inf\{t : x\in F_t\}<s \rightleftarrows \exists t(t<s\wedge x\in F_t)$. $\Longrightarrow \{x : f(x)<s\}=\{x : \exists t(x<s\wedge x\in F_t)\}=\bigcup\{F_t : t\in D\wedge t<s\}$）② $\forall u\exists t(u>s\wedge u>t\wedge x\in F_t)\rightarrow \inf\{t : x\in F_t\}\leqq s$。$\forall t(t>s\wedge x\in F_t\wedge t\in D)\rightarrow\inf\{t : x\in F_t\}\leqq s$（∵D：dense）∴ $\{x : f(x)=\inf\{t : x\in F_t\}\leqq s\}=\{x : t>s\wedge t\in D\rightarrow x\in F_t\}=\bigcap\{F_t : t\in D\wedge t>s\}$ ■

(86) Lemma　D：正の数の集合の稠密な部分集合，$t\in D$，$F_t\in\mathcal{U}_x$

$t<s \longrightarrow F_t^-\subset F_s$

$\bigcup\{F_t : t\in D\}=X$

$\longrightarrow$ $f(x)=\inf\{t : x\in F_t\}$：連続

（証明）f：連続 $\rightleftarrows$ 値域空間の位相のある部分基の各要素の逆像が開（☞(41)-(c)）。ゆえに，$\{t : t<s\}$ または $\{t : t>s\}$ の形の集合（sは実数）は，実数空間の標準位相の部分基を与える（↳ Ⅱ-(42)）。$\Longrightarrow$ $\{x : f(x)<s\}$ が開，$\{x : f(x)\geqq s\}$ が閉なることをいえば十分。$\Longrightarrow$ $\{x : f(x)<s\}=\bigcup\{F_t : t\in D\wedge t<s\}$：開（∵(85)-①，$F_t\in\mathcal{U}_x$）。$\{x : f(x)\geqq s\}=\bigcap\{F_t : t\in D\wedge t>s\}=\bigcap\{F_t^- : t\in D\wedge t>s\}$（∵ $F_t\subset F_t^- \rightarrow \bigcap\{F_t : t\in D\wedge t>s\}\subset\bigcap\{F_t^- : t\in D\wedge t>s\}$。$\forall t(t\in D\wedge t>s)\rightarrow\exists r(r\in D\wedge s<r<t)$（∵ D：dense）$\rightarrow F_r^-\subset F_t\rightarrow\bigcap\{F_r^- : r\in D\wedge r>s\}\subset\bigcap\{F_t : t\in D\wedge t>s\}$）$\Longrightarrow \{x : f(x)\geqq s\}$：閉 ■

(87) Lemma (Urysohn)　$\forall A\forall B(A=A^-, B=B^-, A\cap B=\phi$，X：正規）

$\longrightarrow$ $f(x) : X\rightarrow[0,1]$，$\forall x[(f(x)=0\wedge x\in A)\wedge(f(x)=1\wedge x\in B)]$，$f(x)$：連続　なる関数 f がある。

（証明）$D=\{t : t=p/2^q,\ p,q\in\omega,\ p,q\neq 0\}$：dense。$F(t)$（$t\in D$）を，つぎのように定める：$\forall t(t>1)\rightarrow F(t)=X$，$t=1\rightarrow F(t)=X\sim B$．$t=0\rightarrow F(0)\supset A\wedge F(0)^-\cap B=\phi$。$\forall t(0<t<1)\rightarrow F(t)=F((2m+1)/2^n)$。nに関する帰納法によって，$F(2m/2^n)\subset F(t)\wedge F(t)^-\subset F((2m+2)/2^n)$ なるよう開集合 $F(t)$ をえらぶ（∵

X：正規）。（詳しい手続きは，(尾：32）をみよ。）$\Longrightarrow f(x)=\inf\{t : x\in F_t\}$：連続（∵(86)）。$f(x)$ は，A上で0，B上で1となる。■

立方体への埋蔵

積位相をそなえた，単位閉区間の直積を，立方体（cube）という。Fを $f : X\rightarrow Y_f$ なる写像 f からなる族としよう。評価写像（evaluation map）e とは，$X\rightarrow\times\{Y_f : f\in F\}$ への写像であって，$x\in X$ を，f によって Y_f の座標 $f(x)$ へ移すものである（$e(x)_f=f(x)$）。

(88) Def.　Fは，点を識別する（distinguish points）

$\rightleftarrows$ $\forall x\forall y(x,y\in X\wedge x\neq y)\longrightarrow\exists f(f\in F\wedge f(x)\neq f(y))$

(89) Def　Fは点と閉集合を識別する

$\rightleftarrows$ $\forall x\forall A(x\in X\sim A\subset\mathcal{T})\longrightarrow\exists f(f(x)\notin f(A)^-)$

次の命題を，埋蔵の補題（Embedding Lemma）という。

(90) Lemma　$F=\{f\}$，$f : X\rightarrow Y_f$ 連続

$\longrightarrow$ (a) 評価写像 e は，$X\rightarrow\times\{Y_f : f\in F\}$ への連続写像
(b) Fが，点と閉集合を識別する $\longrightarrow$ $e : X\rightarrow e(X)$ は開写像
(c) e：1：1写像 $\rightleftarrows$ Fが点を識別する

（証明）(a) f-座標への射影を P_f（連続）とすれば，$P_f\circ e(x)=f(x)$：連続 $\Longrightarrow$ e：連続（∵(59)）(b) 仮定 $\Longrightarrow \forall x\forall U\exists f(x\in U\subset\mathcal{T}\wedge f(x)\cap f(X\sim U)^-=\phi)\Longrightarrow Y_U=\{y : y_f\notin f(X-U)^-\}$：open かつ $Y_U\cap e(X)\subset e(U)\Longrightarrow$ eは，Xから $e(X)$ の上への開写像。(c)は，(88)より明らか ■

上の補題によれば，空間を同相にある立方体に埋蔵するという問題は，その空間で定義される連続実数値関数をみつける問題になってしまう。

(91) Def　$(X,\mathcal{T})$：完全正則（completely regular）

$\rightleftarrows$ $\forall x\forall U(x\in U\in\mathcal{U}_x)\longrightarrow f : X\rightarrow[0,1]$ の連続写像で $f(x)=0$，$X\sim U$ の上では $f(x)=1$ なるものがある。

(92) Def.　完全正則な T_1 空間を，Tychonoff空間という。

(93) Th.　任意の正規 T_1 空間は，Tychonoff空間である。

（証明）$\forall x\forall U(x\in U\in\mathcal{U}_x)\longrightarrow X\sim U$：closed，$\{x\}$：closed（∵ T_1 空間 ☞(K:54)）$\longrightarrow$ $X\sim U$ で0，$\{x\}$ で1をとる，連続写像 $f : X\rightarrow[0,1]$ が存在する（∵(87)）

$\longrightarrow X:\text{Tychonoff}$ (∵ (91),(92)) ■

(94)	Th.	任意の完全正則空間は、正則である。

(証明) $\forall x \forall U\,(x\in U\in\mathfrak{U}_x) \longrightarrow$ 連続関数 $f: X\to[0.1]$ があり、$f(x)=1$ $X\sim U$ で 0 $\longrightarrow V\equiv\{y: f(y)<\frac{1}{2}\}$ をつくると、V: open (∵ f: 連続 φ(37)) $\longrightarrow V^{-}\subset\{y: f(y)\leq\frac{1}{2}\}\subset U \longrightarrow X$: regular (∵ 任意の近傍に、閉近傍がとれる。φ(K:114)) ■

(95)	Th.	Tychonoff 空間の積空間はTychonoff空間である。

(証明) (x, U) に関する(for)写像 $f \rightleftarrows x\in U\in\mathfrak{U}_x$, $f(x)=0$, $\forall y\,(f(y)=1 \wedge y\in X\sim U)$ (Def)。(x, U_i) に関する写像 f_i があって、$g(x)\equiv\sup\{f_i(x): i\in N\}$ とおけば、g は、$(x, \cap\{U_i: i\in N\})$ に関する写像になっている。$\Longrightarrow$ 位相空間 $(X, \mathfrak{I})$ は、任意の点 x、$\mathfrak{I}$ の部分基に属する x の任意の近傍 U に対し、(x, U) に関する写像があるなら、完全正則である。(∵ x の任意の近傍に対しては、その部分基をとって、上のように g を定めてやればよい)(*) $X\equiv\mathsf{X}\{X_a: a\in A,\ X_a:\text{Tychonoff}\}$。$\forall x\forall U_a\,(x\in X \wedge x_a=P_a(x)\in X_a \wedge x_a\in U_a\in\mathfrak{U}_a)$ $f: (x_a, U_a)$ に関する写像 $\longrightarrow f\circ P_a$: $(x, P_a^{-1}(U_a))$ に関する写像 $\longrightarrow \{P_a^{-1}(U_a): a\in A\}$ は、積位相の部分基をなす $\longrightarrow X$: 完全正則 (∵ (*)) また、$X_a: T_1 \to X: T_1$ (∵ (61)) $\Longrightarrow X$ は、完全正則な T_1 空間、すなわち、Tychnoff空間 ■

(96)	Embedding Th.	X: Tychonoff	
		$\Longleftrightarrow X$ が立方体の部分空間と同相	

(証明) $Q\equiv[0, 1]$: Tychonoff $\longrightarrow$ 立方体 Q^F: Tychonoff (∵ (95)) $\longrightarrow \forall Y\,(Y\subset Q^F)$: Tychonoff (φ (K:113))。よって、後半は明らか。(前半) X: Tychonoff, F を $f: X\to Q$ なる連続関数すべての族とする。評価写像 $e: X\to\mathsf{X}\{Y_f: f\in F\}$ をつくれば、e は、$X\to Q^F$ への同相写像である (∵ (90)-(d))。■

距離空間と準距離空間

ある集合 X の距離(metric)とは、$d: X\times X\to R(\geq 0)$ なる関数 d で、つぎの4つの条件をみたすものをいう:

(97) Def $\forall x, y, z\in X$

$$\begin{cases} \text{(i)}\ d(x,y)=d(y,x) \\ \text{(ii)}\ d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z) & \text{(三角不等式)} \\ \text{(iii)}\ x=y\longrightarrow d(x,y)=0 \\ \text{(iv)}\ d(x,y)=0\longrightarrow x=y \end{cases}$$

このうち、(i)～(iii)が成立するとき、d を、準距離(pseudo-metric)という。(iv)の条件は本質的でないので、以下、「準距離」とあるところを「距離」としても成立つ。) (X, d) を、準距離空間 (pseudo-metric space) という。$d(x, y)$ を、x から y への距離(distance) または d-距離 (d-distance) という。

(98) Def. $\{y: d(x,y)<r\}$: x での d-半径 r の開球 または x での r 開球。 $(0<r\in R)$

(99) Def. $\{y: d(x,y)\leq r\}$: x での r 閉球。

すべての開球の族は、X のある位相の基になる。この位相を、X の準距離位相 (pseudo-metric topology) という。

(100) Def. $d(x,y)\equiv|x-y|$: 実数の標準距離 (usual metric)

(101) Def. 準距離空間の点 x から、部分集合 A への距離を D とすれば、

$$D(A, x)\equiv\inf\{d(x,y): y\in A\}$$

(102)	Th.	$D(A, x)$ は、準距離位相に関して、x の連続関数である。

(証明) $d(x, z)\leq d(x, y)+d(y, z) \Longrightarrow \inf\{d(x, z): z\in A\}\leq d(x, y)+\inf\{d(y, z): z\in A\} \Longrightarrow D(A, x)\leq d(x, y)+D(A, y) \Longrightarrow |D(A, x)-D(A, y)|\leq d(x, y) \Longrightarrow y\in U(x, r) \longrightarrow |D(A, x)-D(A, y)|<r$. $\Longrightarrow D$: 連続 (∵ (41)-(e)) ■

(103)	Th.	準距離空間で、$A^{-}=\{x: D(A, x)=0\}$

(証明) $D(A, x)$ は x で連続 (∵ (102)) $\longrightarrow \{x: D(A, x)=0\}$: closed (∵ (41)-(b))。また、$A\subset\{x: D(A, x)=0\} \longrightarrow A^{-}\subset\{x: D(A, x)=0\}$ (∵ II-(21)) (*)。 $\forall y\,(y\notin A^{-}) \longrightarrow \exists U(y, r)\,(U(y, r)\cap A=\phi) \longrightarrow D(A, y)\geq r \longrightarrow \{x: D(A, x)=0\}\subset A^{-}$ (対偶) (**)。 (*)と(**)より。■

(104)	Th.	準距離空間は、正規である。

(証明) $\forall A \forall B\,.\,(A, B \subset X \wedge A \cap B = \phi \wedge A^- = A \wedge B^- = B) \longrightarrow \exists U \exists V\, (A \subset U \wedge B \subset V \wedge U \cap V = \phi \wedge U, V \in \mathcal{U}_x)$ をいえばよい。$U \equiv \{x : D(A, x) - D(B, x) < 0\}$, $V \equiv \{x : D(A, x) - D(B, x) > 0\}$ とせよ。$D(A, x)$, $D(B, x)$ は x で連続 $\longrightarrow$ $D(A, x) - D(B, x)$ も x で連続 $\longrightarrow U, V$: open ($\because$ (37))。$U \cap V = \phi$。しかも, $A \subset U$, $B \subset V$ ($\because U = \{x ; D(A, x) - D(B, x) < 0\} = \{x ; D(A, x) < D(B, x)\} \supset \{x : D(A, x) \leq 0\}$ ($\because D(B, x) \geq 0 \wedge A \cap B = \phi$) $= A^- \supset A$。同様に $V \supset B$ ∎

(105) Th. 準距離空間は 第1可算公理をみたす。

(証明) $\forall x \in X$ に対して, 開球の族 $\mathcal{U}(x, r)$ は, x の近傍系の基となる。r が有理数であるものをえらべば, それは可算基である。∎ (↳ II-(51))

(106) Th. 準距離空間が 第2可算公理をみたす
$\Longleftrightarrow$ 準距離空間が 可分 (separable) である。

(証明) 前半は成立する ($\because$ II-(46))。(後半) (X, d) : 可分な準距離空間 $\longrightarrow \exists Y$ $(Y^- = X \wedge \mathrm{card}\, Y \leq \aleph_0)$ ($\because$ II-(45))。$\mathcal{U}$ を, Y の各点で有理数の半径をもつ開球の族とせよ。$\longrightarrow \mathrm{card}\, \mathcal{U} = \aleph_0 \Longrightarrow \forall U (x \in U \subset X) \longrightarrow \exists r\, (U(x, r) \subset U) \longrightarrow \exists s\, (U(x, s) \subset U(x, r) \wedge s$: 有理数$) \longrightarrow \exists y\, (d(y, x) < s/3,\ y \in Y)$ ($\because$ 可分) ここで, $V = \{z : d(z, y) \leq 2s/3\} \in \mathcal{U}$ とせよ。$\longrightarrow x \in V \subset U \Longrightarrow \mathcal{U}$ は, 位相の基となっている。∎

(107) Th. 準距離空間 (X, d) におけるネット $\{S_n ; n \in D\}$ が s に収束
$\Longleftrightarrow \{d(S_n, s) : n \in D\}$ が 0に収束

(証明) $S = \{S_n ; n \in D\}$ が s に収束 $\Longleftrightarrow S$ が, s の 各 r 開球にほとんど含まれる $\Longleftrightarrow \{d(S_n, s) : n \in D\}$ が, 標準距離をもつ実数空間で, 0 の r 開球に殆ど含まれる。∎

(108) Def. 準距離空間の部分集合 A の直径 $d(A)$ とは,
$$d(A) \equiv \sup\{d(x, y) : x \in A \wedge y \in A\}$$

有限の直径をもつという性質は, 位相不変性でない。

(109) Th. 準距離空間 (X, d) で, $e(x, y) = \min[1, d(x, y)]$ とすれば, (X, e) は (X, d) と同一の位相をもつ。

(証明) まず, e が準距離なることをいう。(97)-(i), (iii) の成立は明らか。$\forall a \forall b \forall c$ $(a, b, c > 0 \wedge a + b \geq c) \longrightarrow \min[1, a] + \min[1, b] \geq \min[1, c]$。よって, (ii) も成立し, e は準距離である。(X, d) の準距離位相の基として, r 開球の族 (ただし, $r < 1$) をとりうる。しかるに, d-半径 r 開球でも, e-半径 r 開球でも, おなじ。$\therefore (X, d) \approx (X, e)$ ∎

(110) Cor. 任意の準距離空間は, たかだか直径1の 準距離空間と同相 (homeomorphic) である。

可算個の 準距離空間の 積に対する準距離で, その位相が積位相となるようなものを, つくることができる。

(111) Th. $\{(X_n, d_n) : n \in \omega,\ d(X_n) \leq 1\}$ に対して, $d(x, y) \equiv \Sigma\{2^{-n} d_n(x_n, y_n) : n \in \omega\}$ とすれば, これは 直積に対する準距離であって, 準距離位相は積位相に等しい。

(証明) d は, (97) (i)〜(iii) の 準距離の 公準をみたす。そこで, 2つの位相が 等しいことをいおう。$V \equiv U(x, 2^{-p})$, $x \in V \subset X\{X_n\}$; $U \equiv \{y : d_n(x_n, y_n) < 2^{-p-n-2}, n \leq p+2\}$ とせよ。$\longrightarrow U \subset V$ ($\because \forall y \in U \rightarrow d(x, y) < \Sigma\{2^{-p-n-2} ; n = 0, \cdots, p+2\} < \Sigma\{2^{-p-n-2} ; n = 0, \cdots, n+2\} + \Sigma\{2^{-n} ; n = p+2, \cdots\} < 2^{-p-1} + 2^{-p-1} = 2^{-p}$)。$U$ は, 積位相における x の 近傍で, 準距離空間の近傍 V に含まれることになる。よって, 準距離位相の開集合は, 積位相での開集合になる。(*) 逆に, 積位相 の 部分基の要素を U とすれば, $U = \{x : x_n \in W \wedge W \in \mathcal{U}_n\}$。$\forall x \in U \longrightarrow \exists U(x_n, r)\, (x_n \in U(x_n, r) \subset W) \longrightarrow U(x, r2^n) \subset U$ ($\because d(x, y) \geq 2^n d_n(x_n, y_n)$) よって, 積位相 (の部分基) の各要素 (開集合) は, 準距離位相において開集合となる。(**)
(*) と (**) より, 2つの位相は, 等しい。∎

(112) Def. $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ が 等長 (isometry) である
$\Longleftrightarrow \forall x \forall y\, [x, y \in X \wedge d(x, y) = e(f(x), f(y))]$

等長 (d-e 等長 ともいう) な写像は 連続な開写像である。
(準距離空間に限れば, 等長な写像は, 1対1である。すべての距離空間は等長な同値類にわかれる。ある距離空間のもつ性質を別の等長な距離空間ももつならば, その性質は 距離不変 (metric invariant) という。)

準距離空間の部分集合を，A，B とすれば その距離（distance）は，

(113) Def $\quad D(A,B) \equiv \mathrm{dist}(A,B)$

$$= \inf\{d(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

のように定義される。ここで，準距離空間 (X,d) を，関係 $R : \{(x,y) : d(x,y)=0\}$ によって，$\{x\}^- = \{y : d(x,y)=0\}$ の形の集合からなる集合族 $\mathcal{D}\ (= X|R)$ に分解することを，考えよう。$\mathcal{D}$ に対して，(113) の D は距離を与える。

(114) Th. $\quad \mathcal{D} = \{\{x\}^- : x \in X\}$

$D(A,B) \equiv \inf\{d(x,y) : x \in A \subset X \wedge y \in B \subset X\}$

$\longrightarrow$ $(\mathcal{D}, D)$ は，$\mathcal{D}$ の商位相を位相にもつ距離空間で，X から $\mathcal{D}$ への射影は等長。

（証明）$(\mathcal{D}, D)$ が距離空間なることをいう。$u \in \{x\}^- \rightleftarrows d(u,x)=0 \rightleftarrows d(x,u)=0 \rightleftarrows x \in \{u\}^-$ (*)。$u \in \{x\}^- \wedge v \in \{y\}^- \longrightarrow d(u,v) \leqq d(u,x) + d(x,v) \leqq d(u,x) + d(x,y) + d(y,v) = d(x,y)$。また，$x \in \{u\}^- \wedge y \in \{v\}^-$ (∵ (*)) $\longrightarrow d(x,y) \leqq d(u,v) \Rightarrow d(x,y) = d(u,v) \Longrightarrow {}^\forall A, {}^\forall B, {}^\forall x, {}^\forall y\,(x \in A \wedge y \in B \wedge A, B \in \mathcal{D}) \longrightarrow D(A,B) = d(x,y)$　D は，(97)-(i)〜(iv) をみたすので，距離である。$X \to \mathcal{D}$ への射影は等長。　${}^\forall x\, {}^\forall U\,(x \in U \in \mathcal{U}_x) \longrightarrow {}^\exists r\,(\{x\}^- \in U(x,r) \subset U) \longrightarrow$ $X \to \mathcal{D}$ への射影は，商位相に関して開写像となる。(∵ (71)-(c)→(a))。また，$\mathcal{D}$ の距離 D の与える位相についても，射影は開位相となる。$\Longrightarrow$ ふたつの位相は同一。(∵ (K;95)) ∎

距離化定理

与えられた $(X, \mathcal{T})$ に関し，$\mathcal{T}$ が距離位相となるような（準）距離がとれるなら，$(X,\mathcal{T})$ は，（準）距離化可能（(pseudo) metrizable）という。準距離が距離となるのは，位相が T_1 であるときに限る。

単位閉区間 Q の，可算個の積空間を，Q^ω として示そう。

(115) Metrization Theorem (Urysohn)　位相の可算基をもつ正則な T_1 空間は，立方体 Q^ω の部分空間と同相で，距離化可能。

（証明）$\mathcal{B}$：X の位相の可算基。$\mathcal{A} \equiv \{(U,V) : U^- \subset V,\ U, V \in \mathcal{B}\}$。$\mathcal{A}$ は可算。${}^\forall U, {}^\forall V\,(U, V \in \mathcal{B}) \longrightarrow U^-$ で 0，$X \sim V$ で 1 となる連続関数 $f : X \to Q$ がある。(∵ (83) より，第2可算公理をみたす正則空間は，つねに正規。(81) より，正規空間では，交わらない閉集合に対して，f がみつかる。) $\longrightarrow$ F を，こうしてえらんだ f の族とする（可算）F が，点と集合を識別することをいう。${}^\forall x\, {}^\forall B\,(x \in X \sim B \wedge B^- = B) \longrightarrow {}^\exists U\, {}^\exists V\,(x \in U^- \subset V \subset X \sim B) \longrightarrow (U, V) \in \mathcal{A}$，この対に対応する連続関数を f とすれば，$f(x) = 0 \notin \{1\} = f(B)^-$（識別）$\Longrightarrow$ (90)，(111) により，Q^ω の部分集合に同相であり，T_1 空間 X は，距離化可能になる。∎

(116) Th. $\quad T_1$ 空間 X で，(a)〜(c) は同値：

(a) X は正則で，位相の可算基をもつ。

(b) X は，立方体 Q^ω の部分空間に同相である。

(c) X は，可分かつ，距離化可能である。

（証明）(a) ⇄ (b) (∵ (115))。(b) → (c) Q^ω は，距離化可能で，位相の可算基をもつ。(∵ (111) + T_1) $\longrightarrow$ Q^ω の部分集合も，距離化可能で，位相の可算基をもつ $\longrightarrow$ 可分 (∵ II-(46))。(c) → (a) X が可分で距離化可能 $\longrightarrow$ X : regular (∵ 距離位相がとれる) $\longrightarrow$ 第二可算公理をみたす (∵ 可分かつ，準距離空間だから φ (106)) ∎

(117) Def. $\quad (X, \mathcal{T})$ の部分集合の族 $\mathcal{A}$：局所有限 (locally finite)

$\rightleftarrows$ ${}^\forall x\, {}^\exists U(x)\,(x \in U(x) \subset X$，$U(x)$ は $\mathcal{A}$ の有限個の要素としか交わらない）

(118) Lemma $\quad \mathcal{A}$：局所有限

$\longrightarrow [\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}]^- = \bigcup\{A^- : A \in \mathcal{A}\}$

(119) Lemma $\quad \mathcal{A}$：局所有限

$\longrightarrow \{A^- : A \in \mathcal{A}\}$：局所有限

(120) Def $\quad \mathcal{A}$：疎 (discrete)

$\rightleftarrows$ ${}^\forall x\, {}^\exists U(x)\,(x \in U(x) \subset X$，$U(x)$ は，たかだか $\mathcal{A}$ のひとつの要素としか交わらない。

(121) Def. $\quad \mathcal{A}$：σ 局所有限（σ-疎）

$\rightleftarrows$ $\mathcal{A}$ が局所有限（疎）な部分族の，可算個の和となる。

(122) Metrization Theorem　位相空間 X で、(a)～(c) は同値。

(a) X は、距離化可能

(b) X : T_1 かつ regular, $\mathfrak{T}$ は σ-局所有限な基をもつ。

(c) X : T_1 かつ regular, $\mathfrak{T}$ は σ-疎な基をもつ。

これを、一般距離化定理という。その証明には、準備を要す ((123)～(126))。

(123) Lemma　σ-局所有限な基をもつ正則空間は、正規である。

(証明) $\forall A\forall B(A,B\subset X\wedge A\cap B=\phi\wedge A^-=A\wedge B^-=B)\to$ A, B を含む、交わらない開集合のあることをいう。　A, B の開被覆 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ で、$\mathcal{U}$ の要素の閉包は B と、$\mathcal{V}$ の各要素の閉包は $\mathcal{U}$ と交わらず σ-局所有限な基 $\mathfrak{B}$ の部分族となるものがある (↳(83))。
$\Longrightarrow \mathcal{U}=\bigcup\{\mathcal{U}_n:n\in\omega\}$, $\mathcal{V}=\bigcup\{\mathcal{V}_n:n\in\omega\}$; $U_n=\bigcup\{W:W\in\mathcal{U}_n\}$, $V_n=\bigcup\{W:W\in\mathcal{V}_n\}$ とおく。$\longrightarrow U_n^-\cap B=V_n^-\cap A=\phi$ (∵ $U_n^-=\bigcup\{W^-:W\in\mathcal{U}_n\}$) $\longrightarrow$ $U_n'=U_n\sim\bigcup\{V_k^-:k\leqq n\}$, $V_n'=V_n\sim\bigcup\{U_k^-:k\leqq n\}$ とおけば $A\subset\bigcup\{U_n':n\in\omega\}\wedge B\subset\bigcup\{V_n':n\in\omega\}\wedge[\bigcup\{U_n':n\in\omega\}]\cap[\bigcup\{V_n':n\in\omega\}]=\phi$ ∎

(124) Lemma　σ-局所有限な基をもつ正則な T_1 空間 $(X,\mathfrak{T})$ は、距離化可能である。

(証明) X で定義された準距離の可算集合族 D があって、D の要素は $X\times X$ で連続であり、$\forall x\forall A\,(x\in X\sim A\wedge A^-=A)\to d(A,x)>0$ なる D の要素がある、といえればよい。D を構えよう。　$\mathfrak{B}$: $\mathfrak{T}$ の、σ-局所有限基。$\mathfrak{B}=\{\mathfrak{B}_n:n\in\omega\}$ と考える ($\mathfrak{B}_n$ は、局所有限)。　$\forall(m,n)\forall U\,[U\in\mathfrak{B}_m\wedge m,n\in N\wedge U'=\bigcup\{B:B^-\subset U\wedge B\in\mathfrak{B}_n\}]\longrightarrow U'^-\subset U\longrightarrow U'$ で 1、$X\sim U$ で 0 をとる、連続関数 $f_U:X\to Q$ が存在する (∵ (123), (87)) $\Longrightarrow d(x,y)\equiv\Sigma\{|f_U(x)-f_U(y)|:U\in\mathfrak{B}_m\}$ とすると、d は $X\times X$ で連続。　$\Longrightarrow$ D を、こうして作った準距離の族とする。D は、可算。　$\forall x\forall A\,(x\in X\sim A\wedge A^-=A)\longrightarrow\exists m\exists U(x\in U\subset X\sim A\wedge U\in\mathfrak{B}_m)\wedge\exists n\exists V(x\in V\wedge V^-\subset U\wedge V\in\mathfrak{B}_n)\longrightarrow d(A,x)\geqq 1$。$\Longrightarrow$ $X\to(X,d)$ への写像は連続 $\longrightarrow$ X : 距離化可能 (∵ (90), (114)) ∎

(123), (124) は、(122)-(b)→(a) を示した。(c)→(b) は自明 (∵ (117), (120))。さいごに、(a)→(c) を示そう。$\mathfrak{B},\mathcal{U}$ を、X の被覆とすると、

(125) Def.　$\mathfrak{B}$ は $\mathcal{U}$ の細分 (refinement) である。

$\Longleftrightarrow\ \forall B\exists U\,(B\in\mathfrak{B}\wedge U\in\mathcal{U}\wedge B\subset U)$

(126) Th.　準距離空間の任意の開被覆は、σ-疎な、開細分をもつ。

(証明) $\mathcal{U}$ を、(X,d) の開被覆とする ($X\subset\bigcup\{U:U\in\mathcal{U}\}$)。　$\forall n\forall U(n\in N\wedge U\in\mathcal{U})\longrightarrow U_n=\{x:x\in U\wedge D(x,X\sim U)\geqq 2^{-n}\}$ (U の同心円板) $\longrightarrow D(U_n,X\sim U_{n+1})\geqq D(U_n,X\sim U)-D(U_{n+1},X\sim U)\doteqdot 2^{-n}-2^{-n-1}=2^{-n-1}$。$\mathcal{U}$ を整列順序づける関係 < を選ぶ。$\longrightarrow U_n^*=U_n\sim\bigcup\{V_{n+1}:V\in\mathcal{U}\wedge V<U\}$ とせよ。　$\forall n\forall U\forall V(n\in N\wedge U,V\in\mathcal{U})\longrightarrow U_n^*\subset X\sim V_{n+1}\vee V_n^*\subset X\sim U_{n+1}\longrightarrow D[U_n^*,V_n^*]\geqq 2^{-n-1}$。　$U_n^\sim=\{x:D(x,U_n^*)\leqq 2^{-n-3}\}\longrightarrow D[U_n^\sim,V_n^\sim]\geqq 2^{-n-2}\Longrightarrow$ n を固定すれば $U_n^\sim$ の形の集合の族は、疎となる。$\Longrightarrow\mathcal{V}=\{U_n^\sim:n\in N\wedge U\in\mathcal{U}\}\longrightarrow\mathcal{V}$ は X の開被覆 $\longrightarrow\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の、σ-疎な開細分である。∎

ある空間の性質 P は、部分空間にもわけもたれるなら遺伝的 (hereditary)、積空間にもわけもたれるなら乗法的 (productive)、商空間にもわけもたれるなら除法的 (divisible) である、という。T_1、H (Hausdorff), R (正則), CR (完全正則), T (Tychonoff), N (正規), C (連結), S (可分), C_{I} (第1可算公理), C_{II} (第2可算公理), M (距離化可能), L (Lindelöf) とするとき、次の表は、＋ がその性質をもち、− は必ずしもそうでないことを示す：

	T_1	H	R	CR	T	N	C	S	C_{I}	C_{II}	M	L
遺伝的	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	−
乗法的	+	+	+	+	+	−	+	−	−	−	−	−
除法的	−	−	−	−	−	−	+	+	−	−	−	+

～○～　　＜目次＞　　～○～

CN 93　　HASHIZUME, D.

1979-2-6