1980-15

強い分解定理の不成立について

橋爪大三郎

先の小論（【1980】）において、任意に与えられた束がつねに、たかだか2本の線型順序にパレート分解できるのではないか、という予想をのべた。しかし検討の結果、そのような分解が不可能である反例がみつかったので、はじめの予想はくつがえされた。すなわち、強い分解定理は成立しないのである。これは大変残念な結論であって、そうでない場合にくらべてSFT研究の見通しはいく分悪くなったといえよう。この点をたちいって考えるのは、また別の機会にゆずるとして、以下では、反例を紹介し、その含意を理解することに関心を限定する。

まずはじめに、いわゆる「強い分解定理」として予想された命題を、のべておこう。

> (1)　任意の束Lは、それの厳密な拡張であるような、ただ2本の線型順序R, R′に、パレート分解できる。

こうしてえられるR, R′を、たがいに、Lに関する補線型順序である、ということにする。

任意の束には、その厳密な拡張であるような線型順序が、存在する。それは、つぎの定理によって、保証されていた：

> Th. (Szpilrajn)
>
> (2)　任意の擬順序には、それの厳密な拡張であるような、線型順序が（少くとも1本）存在する。

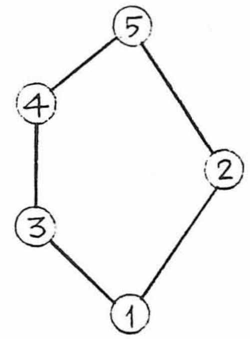
束が擬順序の一種であることは、言うまでもない。

命題(1)が成立しないことを言うには、いろいろのアプローチがありうる。

たとえば：ある束が、それの厳密な拡張であるようなどのような2本の線型順序のパレート合成とも一致しないことを、示すこと。またたとえば、ある束は、それの厳密な拡張であるようないかなる線型順序にもその補線型順序が存在しないことを示すこと。あるいは、ある束のパレート分解であるような順序対の集合が、推移律に違反せざるをえず、線型順序ではなくなるしかないような場合のあることを示すこと。以下で示すのは、この最後の場合である。

つぎに、反例を紹介する前に、準備として、そのための道具だてを説明しておこう。もちだすものは、順序対の正方表、並びに、閉路行列、のふたつである。便宜のため、命題(1)が妥当するような、ひとつの束をとりあげる。

右の図に示されるような束 L を考えよう。



L

束は、要素の順序対の集合であり、そのすべてを書きあらわせば、

$$L = \{ (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5) \}$$

のようであり、(2,3), (3,2), (2,4), (4,2) はいずれもLには属さない。要素2と3、2と4はLで比較不能なわけである。またLは、推移律を満足しており、たとえば、

$$(1,3), (3,4) \longrightarrow (1,4)$$

のようである。推移律により導かれる「自明」の順序対は、上の図では表示されていない。

Szpilrajnの定理(2)によると、上の束Lにも、それの厳密な拡張であるような線型順序が存在する。いまそれらを検べてみると、つぎの3つがそれであることがわかる：

R_1:　$1<2<3<4<5$

R_2:　$1<3<4<2<5$

R_3:　$1<3<2<4<5$

これら以外には存在しない。

線型順序もまた、順序対の集合である、たとえば、

$R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$

など。あきらかに、

$R_1 \supset L$、$R_2 \supset L$、$R_3 \supset L$

であって、R_1, R_2, R_3 はいずれもLの厳密な拡張になっている。ところで、

$R_1 \cap R_2 = L$

であることが言える故、R_1, R_2 は、たがいにLに関する補線型順序である。それに対して、R_3 には、Lに関する補線型構造が存在しない。実際

$R_3 \cap R_3' = L$

を作って、Lの要素に関する順序対の集合を考えてみると、R_3' は、推移律をみたさず、循環

(2,3),(3,4),(4,2)

を含んでしまう。

Lおよび、それの厳密な拡張である R_1 を、順序対の正方表に表示してみよう。下に示したのがそれであるが、図中、太枠□で囲んだ順序対が束Lの要素、細枠□で囲んだ順序対が、束Lの厳密な拡張である線型順序 R_1 のみに属する要素である。

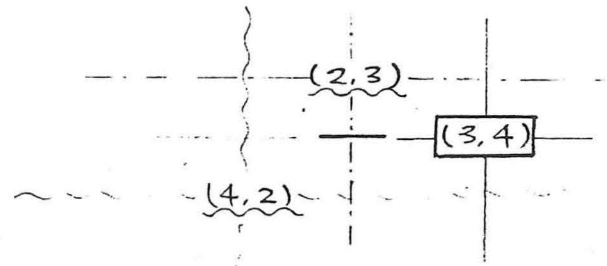
	1	2	3	4	5
1	——	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,1)	——	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,1)	(3,2)	——	(3,4)	(3,5)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	——	(4,5)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	——

この、順序対の正方表には、いくつか興味ぶかい性質がある。まず、右の上三角行列の部分で示される順序対の集合は、かならず線型順序をいみすること。R_2, R_3 にしても、上の表そのままでは上三角行列とはみえないが、適当に行と列とをいれかえてやると、かならず上三角行列のかたちに直すことができる。つぎに、束Lの拡張であるような線型順序が存在するという事実は、上の表の太枠□で囲まれた順序対に、あともういくつかの順序対——(2,3)(2,4)——を追加してやると、上三角行列をつくることができる、という事実として表現できるということ。任意の擬順序は、推移律、反対称律などの公準をみたしているのだから、要素の順番を適当に工夫し、行と列とをいれかえてやると、右上の三角行列のなかに、すっぽりとおさめることができる。Szpilrajnの定理(2)は、それの厳密な拡張であるような上三角行列がかならず作れる、という至極当然のことを言っているのだ。ただもちろん、太枠□で示される束に、いままで比較不能であった順序対をいくつか追加して線型順序を作る方法は決してひと通りに限らないから、たとえば(3,2),(4,2)を追加すれば R_2 を、(3,2),(2,4)を追加すれば R_3 を、それぞれうるのである。

2つの線型順序によるパレート合成が、束をつくるという事実は、□プラス□で示される R_1 と、□プラス〜〜で示される R_2 との共通部分である□が、束Lであるという事実により示される。束のもつ順序対□に追加される順序対□および〜〜は、対角線をはさんで対称的な位置にあり、パレート合成に際しては打ち消しあって比較不能となる。線型順序 R_3 は、Lに(2,4),(3,2)のふたつの順序対を追加してえられる。これと対称的な位置にある順序対(4,2),(2,3)をLに追加した順序対の集合を、さきほど R_3'、とかいた。すなわち、

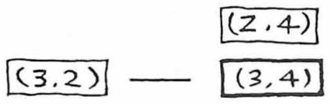
$R_3' = L \cup \{(4,2),(2,3)\}$

である。R_3' は、連結律と、反対称律をみたすのであるが、推移律をみたさず、したがって擬順序ではない。それが含む循環(2,3),(3,4),(4,2)は、正方表のなかで、次に示すような特殊な位置関係にある:



このような結果をまねかないためには、その前の段階でLを拡張するときに、そのもとになる配置(右頁上)を、防いでおかねばならなかったのである。

そこで、束Lをパレート合成できる2本の線型順序があるかどうかをたしかめるには、上三角行列の要素のうち束に属さない順序対とその対称的な位置に

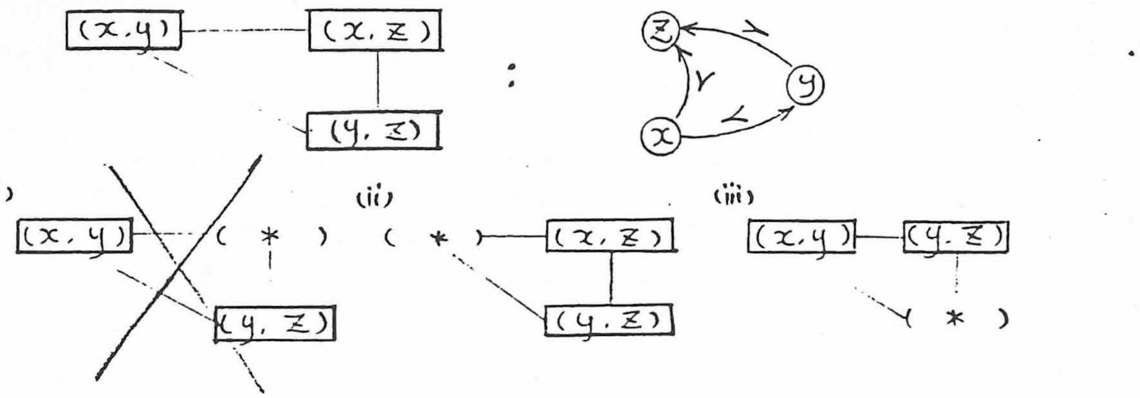


ある順序対の集合を、たとえば上のような配置を含まない、2つの対称な部分に、うまくわける仕方があるかどうかをたしかめればよい。束の与えられ方いかんによっては、もちろんこのようなことは可能である。たとえば先などのLに対する R_1, R_2 がそうである。また、束がはじめから線型順序Rとして与えられているのなら、それ自身とのパレート合成が再びもとの束を与えるであろう。すなわち、$R \cap R = R$。（束をさらに擬順序一般にひろげて考えるなら、その特別な場合である、一切比較可能な対を伴わぬ擬順序に対しては、それをパレート合成するつぎのようなふたつの擬順序をつねに揃えることができるだろう：

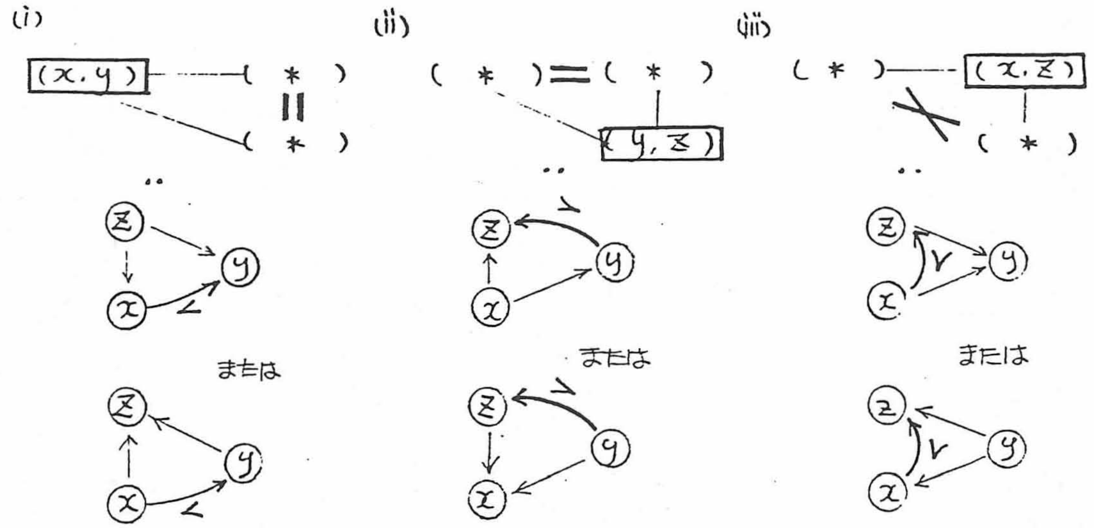
—	$\boxed{(1,2)}$	$\boxed{(1,3)}$	·······		$\boxed{(1,n)}$
(2,1)	—	$\boxed{(2,3)}$	·······		$\boxed{(2,n)}$
(3,1)	(3,2)	—	·······		----
········				—	$\boxed{(n-1,n)}$
(n,1)	(n,2)	(n,3) ······	(n,n−1)		—

下三角行列は、上三角行列の、補線型構造を与える。）

正方表に示された順序対の集合が、循環を含まないための条件を、詳しくしらべてみよう。この条件は、その集合が線型順序であるための、必要条件である。その条件は、任意の3要素 x, y, z のあいだの3つの順序対 (x, y), (y, z), (x, z) が、つねにつぎのようであることを要す。まず、その全てが束に属している場合は、問題がない。そのうち、2つだけが束に属する場合は、3つある（右頁参照）。第1のケースは、束が推移律をみたすものである以上、生じえない（与えられた束のなかには発見されない）。第2、第3のケースは、* 印のカッコのなかは、線型順序に採用されてもされなくてもよい。（採用しない場合は、対称的な位置にある、その逆の順序対が選ばれなくてはならない。）重要であるのは、3つのうちからただ1つの順序対が、束に属する場合



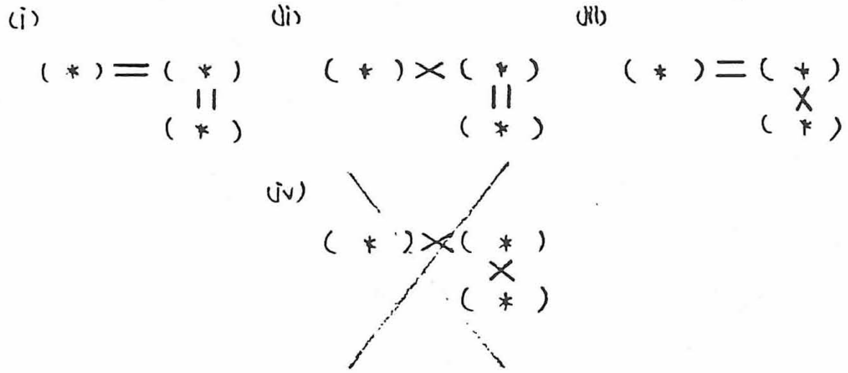
である。この場合には、束の拡張である順序対の2つの集合 R, R′（$R \cap R' = L$）のなかに循環がまぎれこまないために、つぎの条件が必要である：



＝ は、順序対が並行であること、
× は、順序対が交叉であること、 ）を示す

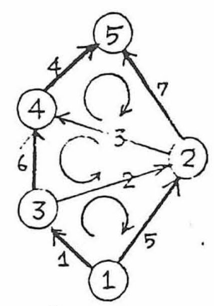
いずれも同一の条件を示していることが判るであろうが、このような条件が必要である理由は、すでにあげた例で R_3 が束Lに関する補線型順序をもたない（R_3' が、循環を含んでしまう）ためLのパレート分解の可能性から除かれねばならなかったのと、同様である。

(x, y), (y, z), (x, z) のいずれもが、所与の束のなかにみつからない場合の条件は、次頁の図のように示される。すなわち、(x, y) と (x, z), (y, z) と (x, z)、のうち少くとも一方は、一方の線型順序にとられなければならない。排除されるのは、そのいずれでもない、第4の場合である：



さきにかかげた正方表（3頁）をためしに仔細に検討してみると，以上にのべたような条件が，任意の3要素のあいだに成立していることがわかるであろう。線型順序たるべき一方の順序対の集合がこのような条件をみたしていれば，補線型順序たるべきもう一方の順序対の集合も循環を含むということがありえず，与えられた束のパレート分解が完成する。

正方表におけるこれら条件は，順序対の集合のなかから循環（推移律への違反）を除外しようとするものであったが，おなじ目的のために，閉路行列もまた有用である。ふたたびさきの5要素からなる束を例として，考えてみよう。



	1	2	3	4	5	6	7
1·2·5	1	(1)	·	·	−1	·	·
2·3·6	·	(1)	(1)	·	·	−1	·
3·4·7	·	·	(1)	1	·	·	−1

＝向き のつけ方からして，同符号

いま，この束の厳密な拡張である線型順序のひとつ，たとえば R_3 をとって，それが含む順序対の鎖（1，3），（3，2），（2，4），（4，5）に順に番号を付す。この経路の周囲の順序対の三角形を考え，（1，2），（3，4），（2，5）にも順に番号を付す。それぞれの三角形に循環の向き または を与え，順序対がそれと一致する向きをもつことを 1，反対の向きをもつことを −1 で示すなら，循環の発生は，1 1 1 または −1，−1 −1 として示されるはずである。ひとつひとつの順序対の三角形のことを，閉路といい，閉路が循環を含むかどうかをし

らべる図表を，閉路行列という。前頁の閉路行列をしらべてみると，どの行にもむろん循環は発生していない。順序対 1～4 までは，経路の進行方向にとってあるから，その下には'1'がくる。また，図中（ ）は，もとの束で比較不能であった対である。

R_3 にもとづく L の閉路行列から，R_3 の補線型順序がつくれるかどうかみるためには，（ ）の中の数字の符号を全てつけかえてやればよい。それをつくると，下のようである：

	1	2	3	4	5	6	7	
1·2·5	1	(−1)	·	·	−1	·	·	
2·3·6	·	(−1)	(−1)	·	·	−1	·	循環の発生
3·4·7	·	·	(−1)	1	·	·	−1	

これは，R_3 に補線型順序が存在しないことを示している。

閉路行列を使って，束のパレート分解が循環をうまないために必要な条件を列挙することができる。

1 −1 (*) ： この行は，決して循環をつくらないから，(*) は 1 でも −1 でもよい。

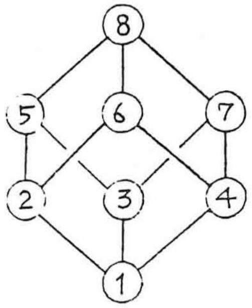
1 ( )×( )
−1 ( )×( ) ： この行は，循環をうまないために，( ) 内は互いに異符号でなければならない。

( )( )( ) ： この行は，すべてが同符号であってはならない。

束が与えられたなら，それとともに，比較不能対を空白の（ ）として含むような閉路行列もまた，与えられたと考えてよい。以上の4条件をみたすようにひとつの経路をかならずその閉路行列のなかに発見できるか否か——強い分解定理の成否をみきわめようとする課題は，このような形に表現することもできる。

以上のようなふたつの道具だて——順序対の正方表と，閉路行列——が揃ったところで，われわれの反例を検討してみよう。まず，つぎに示すような8つの要素をもつ束を考えて，これを L と名づけよう。この L には，ふたつの線型

順序があってLをパレート合成する，と言えるであろうか？ 下の正方表で，

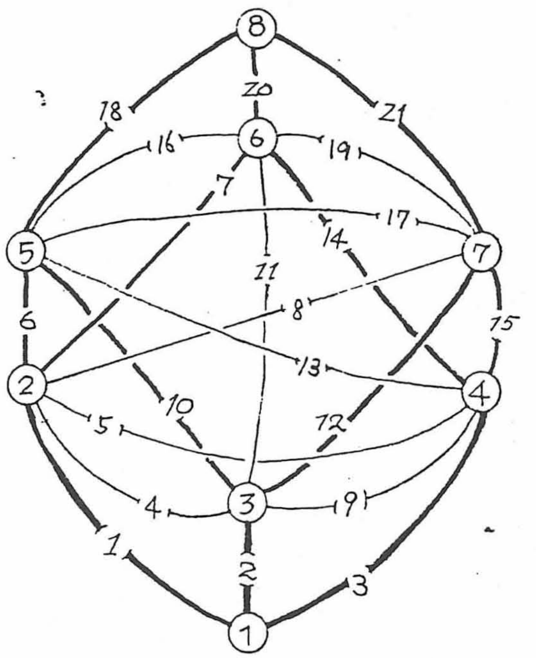


L

—	(1.2)	(1.3)	(1.4)	(1.5)	(1.6)	(1.7)	(1.8)
(2.1)	—	(2.3)	(2.4)	(2.5)	(2.6)	(2.7)	(2.8)
(3.1)	(3.2)	—	(3.4)	(3.5)	(3.6)	(3.7)	(3.8)
(4.1)	(4.2)	(4.3)	—	(4.5)	(4.6)	(4.7)	(4.8)
(5.1)	(5.2)	(5.3)	(5.4)	—	(5.6)	(5.7)	(5.8)
(6.1)	(6.2)	(6.3)	(6.4)	(6.5)	—	(6.7)	(6.8)
(7.1)	(7.2)	(7.3)	(7.4)	(7.5)	(7.6)	—	(7.8)
(8.1)	(8.2)	(8.3)	(8.4)	(8.5)	(8.6)	(8.7)	—

井□のなかの順序対が，束Lの順序対を示す。右上三角上のこる9つの順序対とその対称部分（細枠□内）を，さきほどの条件をみたしながら，うまくふたつの部分集合に分解することができるかどうか，検べてみよう。

正方表のうえで，任意の三つの順序対の組をもれなくかぞえつくすのは，骨がおれるので，閉路行列のたすけをかりて手順を機械的にしてみるのがよい。まず束Lの，然るべき順序対に対して，改めて下のように順に番号をふりなおしてみる：



ここに含まれない順序対，たとえば（2，8）の如きは，上に示す太線の順序対か

ら，推移律によってみちびかれる故に，われわれの当面の目的（循環の発見）にとっては，一切無視しておいてもさしつかえない。そこで1〜21までの順序対から，可能なあらゆる組みあわせをとって，閉路行列をこしらえてみる：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1·4·2	1	−1		(*)																	
1·5·3	1		−1		(*)																
2·9·3		1	−1						(*)												
4·9·5				( )	( )				( )												
4·10·6				(*)		−1				1											
5·13·6					( )	−1				X			( )								
4·11·7				( )		X	−1				( )										
5·14·7					(*)		−1							1							
6·16·7						1	−1									(*)					
4·12·8				( )		X		( )				−1									
5·15·8					( )	X		( )							1						
6·17·8						1		( )				X					( )				
7·19·8							1	( )				X							( )		
9·13·10									( )	−1		X	( )								
9·14·11									( )	X	( )			1							
10·16·11										1	( )			X		( )					
9·15·12									(*)			−1			1						
10·17·12										1		−1					(*)				
11·19·12											( )	−1			X				( )		
13·16·14													( )	−1	X	( )					
13·17·15													( )	X	−1		( )				
14·19·15														1	−1				(*)		
16·19·17																( )	( )		( )		
16·20·18																(*)		−1		1	
17·21·18																	(*)	1			1
19·21·20																			(*)	−1	1

この表で，Xで結ばれたふたつの（ ）は，互に異符号でなければならないことを示し，〜で結ばれた3つの（ ）は，その全てが同符号であってはならないことを示している。循環が生じないためには，そのようでなければならない。

いま，適当な順序対，そう，8——すなわち，（2，7）——から出発しよう。Lのパレート分解が，RおよびR′であるとする（R∩R′=L）。RもR′も，連結律をみたしており，しかもLで比較不能な対に関しては対称的な順序づけを示すのだから，（2，7）∈R，（2，7）∈R′の一方だけがかならず成立する。そこで，（2，7）∈Rと仮定し，しかもRもR′も循環をもたないとする。この仮定

のもとでは，つぎの推論が進行する：

(1)　8：(2,7) ∈ R　すなわち　2＜7　(∵ 仮定)
(2)　5：(2,4) ∈ R　すなわち　2＜4　(∵ (1)，5·15·8)
(3)　4：(2,3) ∈ R　すなわち　2＜3　(∵ (1)，4·12·8)
(4)　17：(6,7) ∈ R　すなわち　6＜7　(∵ (1)，6·17·8)
(5)　19：(5,7) ∈ R　すなわち　5＜7　(∵ (1)，7·19·8)
(6)　11：(6,3) ∈ R　すなわち　6＜3　(∵ (3)，4·11·7)
(7)　16：(6,5) ∈ R　すなわち　6＜5　(∵ (6)，10·16·11)
(8)　13：(5,4) ∈ R　すなわち　5＜4　(∵ (2)，5·13·6)
(9)　14：(4,6) ∈ R　すなわち　4＜6　(∵ (4,6) ∈ L)
(10)　(7)〜(9) ⟶ Contra.

同じ結果を，正方表でも確認できるだろう。9頁でふった順序対の番号を，順序対のかわりに用いると，表はだいぶ簡潔になる。

—	1	2	3				
	—	4	5	6	7	8	
		—	9	10	11	12	
			—	13	14	15	
			13′	—	16	17	18
		15′			—	19	20
						—	21
							—

ここで，次の推論が生じている：

$$8:+1\ (\text{仮定}) \longrightarrow 5:+1\ \left(\because\ 5=\begin{matrix}8\\15\end{matrix}\right),\quad 4:+1\ \left(\because\ 4=\begin{matrix}8\\12\end{matrix}\right)$$

$$17:+1\ \left(\because\ \begin{matrix}6 & 8\\ & \| \\ & 17\end{matrix}\right),\quad 19:+1\ \left(\because\ \begin{matrix}7 & 8\\ & \| \\ & 19\end{matrix}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 11:-1\ \left(\because\ \begin{matrix}4 & 7\\ & 11\end{matrix}\right) \longrightarrow 16:-1\ \left(\because\ \begin{matrix}10 & 11\\ & \| \\ & 16\end{matrix}\right) \\ 13:-1\ \left(\because\ \begin{matrix}5 & 6\\ & 13\end{matrix}\right) \end{cases}$$

$$\longrightarrow\ 13\ \boxed{14}\ 16\quad (\text{Contra.})$$

われわれは任意の仮定からはじめたのだから，以上の推論によって，少くともいま問題としている束Lには，互いに補線型順序であるようなR，R′へのパレート分解がありえないことが判った。この事実は，強い分解定理が一般に成立しないことを結論させるに十分である。

強い分解定理が証明される可能性はこのように否定されたが，つぎのような疑問はまだ，手つかずのままに残っている。すなわち，

(1) 束よりも制限のきつい，どのような順序構造が，強いいみで分解可能であるだろうか？　とくに，強いいみで束が分解可能であるための，必要十分条件はなにか？

(2) 一般の有限束は，有限個の線型順序に分解可能なことが知られている。それでは，その個数の上限は存在するのか？　とくに，2本ではなかったにせよ，何本かの少数の線型順序に必ずパレート分解できることが言えないか？

という疑問であるが，このうち前者についていま考えている予想をいうと，平面グラフで書ける束であることが，ポイントではないであろうか？　平面をこえる場合には，各閉路につけた向き ↻ が三次元空間をひと回りしてくる間に逆向きになり，推移律に違反する重なり方をひきおこすようだからである。また後者について言えば，有限束は，三次元ユークリッド空間のなかにその幾何学的表現をもつことがしられているので，(1) の疑問が平面グラフと関連づけてとかれた場合には，ついでに解けてしまうという可能性もある。

文献　橋爪大三郎 1980「構造=機能理論研究における若干の進展 ―志田の「同型定理」を軸に―」，未発表。
小野寺力男 1973『グラフ理論の応用と展開』(数学ライブラリー 30)，森北出版。
志田基与師 1980「HST分解定理の証明」，未発表。