'81 小室ゼミ

数理統計入門*

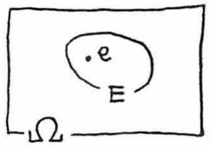
橋爪 大三郎

1 標本空間・事象・確率

Ω：標本空間（sample space）

e：標本点（sample point）　　$e \in \Omega$

E：事象（event）　　$E \subset \Omega$



(1-1)　$e \in E$　であるとき，eを事象点（event point）という。

(1-2)　$E_1 = E_2$　であるとき，E_1，E_2の2つは事象として相等であるという。

(1-3)　$E_1 \subseteq E_2$　であるとき，E_1はE_2の部分事象

(1-4)　$E_1 \cap E_2$：E_1とE_2との積事象
　　これを，$E_1 \cdot E_2$と表記することもある。

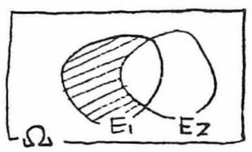
(1-5)　$E_1 \cup E_2$：E_1とE_2との和事象

(1-6)　$E_1 \cap E_2 = \emptyset$　であるとき，E_1とE_2とは互いに排反的（mutually exclusive）だといい，互いに排反事象であるとよぶ。

(1-7)　$E_1 \cap E_2 = \emptyset$　であるとき，$E_1 \cup E_2$を$E_1 + E_2$と書くことがあり，E_1とE_2の直和（direct sum）という。

(1-8)　$E^c = \{e \mid e \notin E\}$　を，Eの補事象（余事象）という。また，記号的に
　　これを　$\Omega - E$　あるいは単に　$-E$　と書く。
　　ある事象とその補事象とは，排反事象である（$E \cap E^c = \emptyset$）。

(1-9)　$E_1 - E_2 = E_1 \cap (\Omega - E_2) = E_1 \cap (E_2^c)$　を，E_1に関するE_2の補事象（余事象）という。
　　右図では，斜線部に相当する。



＊このレジュメは，1975年度に小室教授・橋爪大三郎がまとめたレジュメの内容をほぼそのままの形で踏襲し，再編集したものです。

Kolmogoroff の確率公理

(1-10)　$0 \leq P(E) \leq 1$

(1-11)　$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n \overset{※}{(+\cdots)}$
　　$\longrightarrow P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \overset{※}{(+\cdots)}$

(1-12)　$P(\Omega) = 1$

注）(1-11)において，※の括弧をみとめない場合，すなわち有限の範囲でのみ成立をみとめる場合を，有限加法性をみたすという。※をみとめる場合，すなわち事象が可附番な部分事象の直和としてあらわせるときにも成立するとする場合，(1-11)は完全加法性（ないしσ加法性，可算加法性）がみたされることを言っている。通例は後者をとる。詳しくは 恒松［1978ａ］などのレジュメ，又は確率測度論のテキストを参照せよ。

確率とは，標本空間Ω上で定まる適当な事象の集合，すなわち事象空間（event space）上で定義され，Kolmogoroff の公理(1-10)〜(1-12)をみたすような実数値関数Pのことである。明らかにPは，次のような性質をもつ。

(1-13)*　$P(E) + P(E^c) = 1$　　（＊印は，証明を練習として課す）

(1-14)*　$P(\emptyset) = 0$

(1-15)*　$E_1 \subset E_2 \longrightarrow P(E_1) \leq P(E_2)$

(1-16)*　$P(E_1 - E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)$
　　とくに，$E_1 \supseteq E_2$のときには，$P(E_1 - E_2) = P(E_1) - P(E_2)$となる。

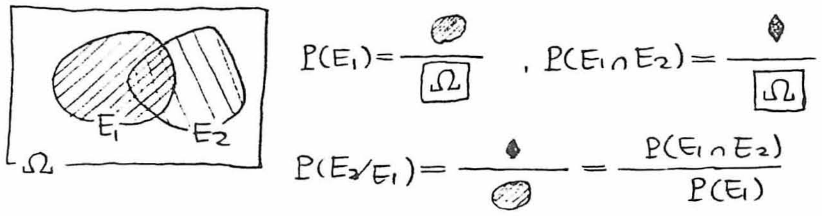
(1-17)*　$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
　　とくに，$E_1 \cap E_2 = \emptyset$のときには，$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$となる。（↳ (1-11)）

条件つき確率（Conditional Probability）をつぎのように定義する。

Df.　$$P(E_2/E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

$P(E_2/E_1)$は，$P(E_2 \mid E_1)$，$P\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$などと表記することもある。この定義は無条件で$E_1$，$E_1 \cap E_2$が生起する確率によって定義されており，$E_1$が生起することがたしかで

あるときに $E_1\cap E_2$ が生起する確率を表現するものである。図で表示すれば下の通り:



(1-18)* $P(E_1\cap E_2)=P(E_1)\cdot P(E_2/E_1)=P(E_2)\cdot P(E_1/E_2)$

(1-19)* Bayes の公式

$E_1,E_2,\cdots,E_n$ が相互排反的で $E_1+E_2+\cdots+E_n=\Omega$ であるとする。任意の事象 A ($\subset\Omega$) をとるならば

$$P(E_i/A)=\frac{P(E_i\cap A)}{P(E_i)}=\frac{P(A/E_i)\cdot P(E_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(E_j)\cdot P(A/E_j)}$$

事象の独立を、つぎのように定義する:

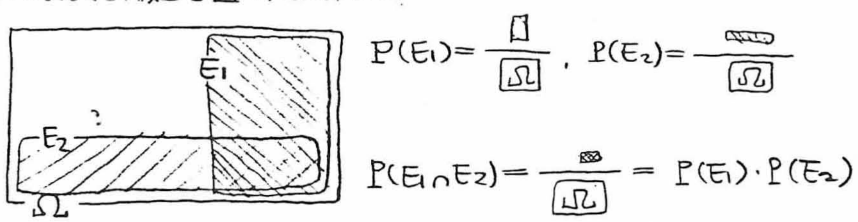
(1-20) Df. $P(E_1\cap E_2)=P(E_1)\cdot P(E_2)$

$\iff$ 事象 E_1 と E_2 とは、互いに独立である。

(1-21) Df. $P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_n)=P(E_1)\cdot P(E_2)\cdot\cdots\cdot P(E_n)$

$\iff$ 事象 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ は互いに独立である。

事象の独立を、2変数の場合で図解してみると、



(1-22)* $P(E_1\cap E_2)=P(E_1)\cdot P(E_2)$

$$\iff\begin{cases}P(E_1/E_2)=P(E_1)\\ P(E_2/E_1)=P(E_2)\end{cases}$$

つぎに、重要な確率や確率分布を、一覧にして掲げておこう:

2項分布 (binominal distribution)

(1-23) $P(r)={}_nC_r\,p^r q^{n-r}$ $(q=1-p)$

n: 試行の回数

p: 1回の試行について、事象の生起する確率

r: 事象のおこった回数

多項分布 (polynominal distribution)

(1-24) $P(x_1,x_2,\cdots,x_r)=\frac{n!}{x_1!\,x_2!\cdots x_r!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_r^{x_r}$ $(x_1+x_2+\cdots+x_r=n)$ $(p_1+p_2+\cdots+p_r=1)$

p_i: 1回の試行について、第i番目の事象が生起する確率

x_i: n回の試行で第i番目の事象がおこった回数

ポアソン分布 (Poisson distribution)

(1-25) $f(r)=\frac{e^{-(kt)}(kt)^r}{r!}=\frac{e^{-m}m^r}{r!}$

k: 単位空間につき期待される事象のおこる数

t: 単位空間の数

m=kt: 全空間の事象の数

r: 実際に求める事象の数

正規分布 (normal distribution)

(1-26) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$

m: 平均

σ^2: 分散

カイ自乗分布

(1-27) $f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & (x>0)\\ 0 & (x\leq 0)\end{cases}$ Γ: ガンマ関数

T分布 (Student)

(1-28) $f_n(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$

F分布 (Fischer)

(1-29) $f_{m,n}(x)=\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(x+1)^{\frac{m+n}{2}}}$

一様分布

$$(1\text{-}30)\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$ Hoel・Port・Stone [1971=1983: 46, 100]

コーシー分布 (Cauchy distribution)

$$(1\text{-}31)\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\ell}{\ell^2+(x-m)^2}$$ Hoel・Port・Stone [1971=1983: 103]
Wilks [1962=1971: 130]

超幾何分布

$$(1\text{-}32)\qquad f(x)=\frac{\binom{r_1}{x}\binom{r-r_1}{n-x}}{\binom{r}{x}}$$ Wilks [1962=1971: 134f]

負の2項分布 (パスカル分布)

$$(1\text{-}33)\qquad P(x)=\binom{x-1}{k-1}p^{k-1}q^{x-k}\qquad x=k,\ k+1,\cdots$$ Wilks [1962=1971: 144]

これらのうち最も重要であるのは正規分布ならびにその系列である。その導出の順序は下図の通りであり，予備知識として，変数変換，特性関数，ガンマ関数の理解が求められる。

正規分布　　$X:\ N(0,\sigma)$

↓

(自由度 n の) χ^2 分布　　$\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}{\sigma^2}=\chi^2(n)$

↙　　↘

(自由度 k_1, k_2 の) F分布　　$\dfrac{\chi^2(k_1)/k_1}{\chi^2(k_2)/k_2}=F(k_1,k_2)$

(自由度 k の) t 分布　　$\dfrac{X}{\sqrt{\chi^2(k)/k}}$

練習問題 1

1-1 (1-13)～(1-19) を証明せよ。

1-2 $P(E)=0 \longrightarrow E=\emptyset$ が成立するか？ 成立するなら証明を示し，そうでないなら反例をあげよ。

1-3 (1-22) を証明せよ。

1-4 2項分布 (1-23) において，$np=m=k$ であるとするなら，

$$\lim_{n\to\infty} {}_nC_r\, p^r(1-p)^{n-r}=\frac{e^{-m}\,m^r}{r!}$$ なることを証明せよ。

1-5 メダカは $1\,m^3$ 中に平均5匹いることがしられている。$100\,m^3$ 中に382匹いる確率を求めよ。

1-6 1ヶ月の交通事故死者数は10人である。1年に150人の交通事故死者の出る確率を求めよ。

1-7 3% のフューズが不良品である。フューズ100個入りの箱に多くとも2個の不良品の含まれている確率を求めよ。

1-8 ポーカーでツーペアをうる確率はいくつか。ただし，(2, 2, 2, 2, x) などの手はツーペアでなくフォーカーズとかぞえる。

1-9 トランプを1枚づつめくって K が出るまでつづける。x 枚目にはじめて K が出る確率を求めよ。

1-10 1年365日，同じ確からしさで誕生するとする。n 人のグループでどの2人の誕生日も同じでない確率を求めよ。

1-11 壺に m 個の黒球，n 個の白球が入っている。元へもどすことなく，k 個の球をそのなかからとりだす。白球が r 個とりだされる確率を求めよ。

1-12 6個のサイコロを投げる。1の目が x 個，2の目が y 個でる確率を求めよ。

1-13 ポーカー5枚のカードのうち，少なくとも1枚が10以上のとき，7より小さい数が含まれていない確率を求めよ。

(解答は 25 ページ)

2　確率変数

標本空間Ω，その上の事象の集合（σ加法族）$\mathcal{E}$，$\mathcal{E}$上で定義される確率測度 P が特定されるとき，ひとつの確率空間が定まっている。これを，（Ω，$\mathcal{E}$，P）のように記す。

この確率空間の上で，確率変数（random variable）を定義する。（確率「変数」と言っても，その正体は関数なので，注意のこと。）　確率変数には離散型，連続型などがあるが，はじめのふたつが重要である。まず，離散型（discrete）の場合からみていこう。

(2−1)　Df.　離散型確率変数　$X : \Omega \longrightarrow \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$

（実数 R の，有限または可算無限集合．）

$$\forall i\ [\ \{e \mid X(e) = x_i\} \in \mathcal{E}\ ]$$

$\{e \mid X(e) = x_i\}$ は事象なのだから，確率 P が値をもつ。それを簡単に，$P(X = x_i)$ とかく。

(2−2)　Df.　離散型密度関数　　$f(x) = P(X = x)$

f は，R 上の実数値関数である。この密度関数は，当然，つぎの３つの条件をみたす：

(2−3)　(i)　$f(x) \geq 0$　　$(x \in R)$

(ii)　$\{x \mid f(x) \neq 0\}$ は，R の有限または可算無限な部分集合。これを $\{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$ と書くと，

(iii)　$\sum_i f(x_i) = 1$

(iii)の成立は，事象 $\{e \mid X(e) = x_i\}$ が互いに素で，その和が Ω であることから帰結する。

(2−4)　Df.　分布関数　$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x)$

$F(x)$ を，確率変数 X または密度 f の分布関数という。

(2−5)　　$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

$$= F(b) - F(a)$$

以上は，１変数の場合であるが，これを自然に，２変数，３変数，…，r 変数へと拡張できる。

(2−6)　Df.　n 次元離散確率ベクトル　$X : \Omega \longrightarrow \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$

（R^r の，有限または可算無限集合）

$$\forall i\ [\ \{e \mid X(e) = x_i\} \in \mathcal{E}\ ]$$

密度関数 f，分布関数 F についても，(2−2)〜(2−5)をベクトル表現になおせば，そのまま成立する。

つぎに，連続型（continuous）の確率変数に目を向けよう。確率空間（Ω，$\mathcal{E}$，P）上の確率変数を，つぎのように定義する：

(2−7)　Df.　確率変数　$X : e\ (\in \Omega) \longmapsto X(e)\ (\in R)$

$$\forall x\ (-\infty < x < \infty)\ [\ \{e \mid X(e) \leq x\} \in \mathcal{E}\ ]$$

さらに，

(2−8)　Df.　(累積)分布関数（cumulative distribution function：c.d.f.）F：

$$F(x) = P(X \leq x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

(2−9)*　　$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$　　$(a \leq b)$

(2−10)*　分布関数の性質

(i)　$0 \leq F(x) \leq 1$

(ii)　F：非減少関数

(iii)　$F(-\infty) = 0$，　$F(+\infty) = 1$

(iv)　すべての x に対して，　$F(x+) = F(x)$

$F(x+)$ とは，$F(x)$ の右側極限値，すなわち　$F(x+h)$　$(h>0)$ の極限値。$F(-\infty)$，$F(+\infty)$ は，$x \to -\infty$，$x \to +\infty$ としたときの，右(左)側極限値。

ぎゃくに，(2−10)を満たす任意の関数 F に対し，ある確率空間（Ω，$\mathcal{E}$，P）とそこで定義された確率変数 X をみつけ，(2−8)が成立するように出来ることがしられている。

(2−11)　(確率)密度関数（probability density function：p.d.f.）f：

(i)　$f(x) \geq 0$

(ii)　$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

(2−12)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy \qquad (-\infty < x < \infty)$$

f が(2−11)にいう p.d.f. のとき，(2−12)によって定義された F は，(2−10)の性質(i)〜(iv)をみたす。（密度をもたない連続な分布関数も，あるにはあるらしい。Hoel-Port-Stone [1971＝1973：98]）

(2-13) $P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (a \leqq b)$

(2-14) $f(x) = \dfrac{d}{dx} F(x) = F'(x)$

以上は，1変数についてであったが，2変数，… n 変数についても自然に拡張することができる。$(\Omega, \mathcal{E}, P)$ 上の n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ があるとする。

(2-15) Df. 結合分布関数 F：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \leqq x_1, X_2 \leqq x_2, \cdots, X_n \leqq x_n)$$
$$(-\infty < x_1, x_2, \cdots, x_n < \infty)$$

(2-16) Df. 結合密度関数 f：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \cdots, u_n)\,du_n \cdots dx_2 dx_1$$
$$(-\infty < x_1, x_2, \cdots, x_n < \infty)$$

(2-17)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_1 dx_2 \cdots dx_2 = 1$$

(2-18)
$$P(a_1 \leqq X_1 \leqq b_1, \cdots, a_n \leqq X_n \leqq b_n) = \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \cdots, x_n)\,dx_n \cdots dx_1$$
$$(a_m \leqq b_m \ (m = 1, \cdots, n))$$

1変数の場合に準じて，F は

(2-19) (i) $0 \leqq F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqq 1$

(ii) F：非減少関数

(iii) $F(+\infty, +\infty \cdots, -\infty, \cdots, +\infty) = 0, \quad F(+\infty, \cdots, +\infty) = 1$

などの性質をもつ。

(2-20) Df. (2変数の) 周辺分布 (marginal distribution)

$$P(a \leqq x_1 \leqq b) = \int_b^a \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_2}\, dx_1$$
$$= \int_b^a \boxed{f_1(x_1)}\, dx_1 \qquad f_1(x_1)\text{：}x_1 \text{ の周辺密度}$$
$$= F_1(a) - F_1(b) \qquad F_1(x_1)\text{：}x_1 \text{ の周辺分布}$$

(2-21) Df. (n 変数の) 周辺分布

$$f_{i_1 \cdots i_k}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x_n)\,dx_{i_{k+1}} \cdots dx_{i_n}$$

(2-22) Df. (2変数の) 条件付密度

$$f(x_1 / x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)}$$

(2-23) Df. (n 変数の) 条件付密度

$$f_{X_{k+1}, \cdots, X_n | X_1, \cdots, X_k}(x_{k+1}, \cdots, x_n / x_1, \cdots, x_k) = \frac{f(x_1, \cdots, x_n)}{f_{X_1, \cdots, X_k}(x_1, \cdots, x_k)}$$

(2-24) Df. (n 個の確率変数の) 独立 (Independence)

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \cdots \cdot f_n(x_n)$$

$* \Updownarrow$

(2-25) $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdot \cdots \cdot F_n(x_n)$

(2-26) Df. (確率変数の) 期待値

$$E(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) & \text{(i) (離散型)} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx & \text{(ii) (連続型)} \end{cases}$$

(2-27) Df. $X_1, \cdots, X_n$：結合密度 f をもつ，連続型確率変数，$Z = \varphi(X_1, \cdots, X_n)$ のとき，

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \cdots, x_n) f(x_1, \cdots, x_n)\,dx_n \cdots dx_1$$

(2-28) 期待値の，線型性

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i) } E(kX) = kE(X) \\ \text{(ii)}^* \ E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \text{(iii) } E\left(\sum_i k_i X_i\right) = \sum_i k_i E(X_i)$$

(2−29) Df. (i) $E(X)=m_X$ ：平均 (mean)

(ii) $E((X-m_X)^2)=\sigma_X^2$ ：分散 (variance)

(iii) $E((X-m_X)(Y-m_Y))=cov(X,Y)$ ：共分散 (covariance)

(iv) $\rho_{XY}=\dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$ ：相関係数 (correlation coefficient)

(2−30)* Th. (i) $\sigma_X^2=E(X^2)-m_X^2$

(ii) $\sigma_{aX+b}^2=a^2\cdot\sigma_X^2$

(iii) $\sigma_{\frac{X}{n}}^2=\frac{1}{n^2}\sigma_X^2$

(iv) $\sigma_{X+Y}^2=\sigma_X^2+2\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y+\sigma_Y^2$

練習問題 2

2−1 (2−9) を証明せよ。

2−2 (2−10) を証明せよ。

2−3
$$f(x)=0 \quad (x\leq 2)$$
$$=\frac{1}{18}(3+2x) \quad (2<x<4)$$
$$=0 \quad (4\leq x)$$
のとき, (1) $f(x)$ は p.d.f. を示し, (2) $P(2<X<3)$ を求めよ。

2−4
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=16x_1x_2x_3x_4 \quad (0<x_i<1)$$
$$=0 \quad (otherwise)$$
は p.d.f. であることを示せ。

2−5
$$f(x)=\frac{1}{x} \quad (1\leq x\leq e)$$
$$=0 \quad (otherwise)$$
のとき, (1) $f(x)$ は p.d.f. であることを示し, (2) $P(\sqrt[3]{e}\leq X\leq\sqrt{e})$ を求めよ。

2−6.
$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{8}(6-x_1-x_2) \quad (0\leq x_1\leq 2,\ 2\leq x_2\leq 4)$$
$$=0 \quad (otherwise)$$
のとき 周辺密度 $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ を求めよ。

2−7 (1) $F_1(x_1)=F(x_1,\infty)$ （但し $F_1(x_1)=\int_{-\infty}^{x_1}f_1(x_1)dx_1$）

(2) $F_2(x_2)=F(\infty,x_2)$ を示せ。

2−8 (2−24) ⟺ (2−25) を示せ。

2−9 2−6 の p.d.f. から, $f(x_2/x_1)$ を求めよ。

2−10 (2−28) (ii) を示せ。

2−11 (2−30) (i)〜(iv) を示せ。

2−12 離散型確率変数 X がある.

x :	1	2	3	4	5	6
$f(x)$:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

なる密度をもつとき,

(1) $X+1$, (2) $2X$, (3) X^2 を示せ。

2−13 2つのサイコロをなげるとき, $f(x)$, $F(x)$, m_X, σ_X^2 を求めよ。

(解答は 27 ページ)

3　変数変換

いくつかの確率変数から，あたらしく確率変数をつくりだすことができる。その際，もとの密度や分布と，新たな密度や分布との関係が，問題となる。

$y=\varphi(x)$　：xの（Borel－可測 measurable な）関数

X：確率変数　c.d.f.　$F(x)$　$\Longrightarrow$ $Y=\varphi(X)$：確率変数　c.d.f.　$G(y)$

(3-1)　$$G(y)=P(Y\leq y)=P(\varphi(x)\leq y)=\int_{E_y} dF(x)$$

E_y とは，$\varphi(x)\leq y$ となる x軸上の点全体である。

注）$\int_{E_y} dF(y)$ とは，Stieltjes 積分の記法であるが，連続型のときは $\int_{E_y} f(x)dx$ と考えておいて一応さしつかえない。（Wilks [1944=1952：27ff]）

(3-1)は，1変数の場合であるが，多変数の場合にも拡張できる。

$y=\varphi(x)$：xの（B－可測な）関数

$X=(X_1,X_2,\dots,X_k)$：確率ベクトル　c.d.f.　$F(x)$

$\Longrightarrow$ $Y=(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)=\varphi(X)$：確率ベクトル　c.d.f.　$G(y)$

(3-2)　$$G(y)=\int_{E_y} dF(x)$$

但し，E_yは　$\varphi(x)\leq y$ なる如き R^k内の領域。

離散型確率変数の変換は，容易にもとめられる。

X：離散型確率変数　$P(X=x_i)=p_i$　$(\sum p_i=1)$.

$\Longrightarrow$ $Y=\varphi(X)$：離散型確率変数

(3-3)　$$P(Y=y_i)\begin{cases}=P(X=x_i)=p_i & (\varphi^{-1}\text{が1価のとき})\\ =\displaystyle\sum_{j=1}^{k}P(X=x_{ij}) & (\varphi^{-1}\text{が多価のとき。但し，}\varphi^{-1}(y_i)=x_{ij}\ (j=1,\dots,k))\end{cases}$$

$X_1,X_2,\dots,X_k$：離散型確率変数　　$f(x_1,x_2,\dots,x_k)$　：密度関数

$F(x_1,x_2,\dots,x_k)$　：分布関数

$\Longrightarrow$ $Y=\varphi(X_1,X_2,\dots,X_k)$　　$g(y)$　：密度関数

$G(y)$　：分布関数

(3-4)　$$g(y_i)=\sum' f(x_1,x_2,\dots,x_k)$$

$y_i=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_k)$となる $x_1,x_2,\dots,x_k$のすべてについて。

連続の場合には，話が少々複雑である。

X：連続型確率変数　$\Longrightarrow$ $Y=\varphi(X)$　φ：(i) $a<x<b$で 連続

(ii) $x=a_1,\dots,a_n$ のとき $\varphi'(x)=0$

$f(x)>0$　$a<x<b$

$f(x)=0$　otherwise　　$g(y)$：p.d.f.

ここで，区間(a,b)を互いに素なn個の区間 $I_i=(a_{i-1},a_i)$　$(i=1,n)$に分割する。I_iにおいては，$\varphi(x)$は単調。よって，$X=\varphi_i^{-1}(Y)$と書ける。ただし，φ_iはI_iにおける$Y=\varphi(X)$のこと。すなわち，

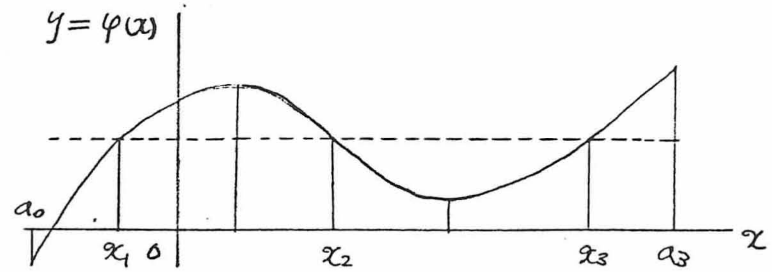
$$\varphi(x)\begin{cases}=\varphi_1(x) & (a_0<x<a_1) & \text{その逆関数は} & x=\varphi_1^{-1}(y) & y\in A_1\\ =\varphi_2(x) & (a_1<x<a_2) & 〃 & x=\varphi_2^{-1}(y) & y\in A_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ =\varphi_n(x) & (a_{n-1}<x<a_n) & 〃 & x=\varphi_n^{-1}(y) & y\in A_n\end{cases}$$

$$A_i=\{y\mid \varphi_i^{-1}(a_{i-1})\leq y\leq \varphi_i^{-1}(a_i)\}$$

とするなら，

(3-5)　$$g(y)\begin{cases}=0 & \text{どの区間}I_i\text{にも，}y=\varphi(x)\text{となる点が存在しないとき}\\ =\displaystyle\sum f(\varphi_i^{-1}(x))\left|\frac{d\varphi_i^{-1}(y)}{dy}\right| & \end{cases}$$

I_iにおいて，$\varphi_i(x)=y$ であるiすべてについて。



(3-6)　$X_1,X_2,\dots X_k$　$\Longrightarrow$ $Y=\varphi(X_1,X_2,\dots,X_k)$

$f(x_1,x_2,\dots,x_k)$：p.d.f.　　$g(y)$：p.d.f.

なる，より一般の場合については，

① $Y=\varphi(X_1,X_2,\dots,X_k)$を，たとえば$X_1$についてとき，$X_1=x_1(Y,X_2,\dots,X_k)$とする。

（φが単調でないなら，必要な区間分割を行ない，x_{1i}　$(i=1,\dots,n)$ とする。）

② $h(y, x_2, \cdots, x_k) = \sum_i f(x_{1i}(y, x_2, \cdots, x_k), x_2, \cdots, x_k) \left| \dfrac{\partial x_{1i}}{\partial y} \right|$

③ $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(y, x_2, \cdots, x_k)\, dx_k \cdots dx_2$

(3-7) $X_1, X_2, \cdots, X_k$ $\Longrightarrow$ ※ $\begin{cases} Y_1 = \varphi_1(X_1, \cdots, X_k) \\ \cdots \\ Y_r = \varphi_r(X_1, \cdots, X_k) \end{cases}$

$f(x_1, x_2, \cdots, x_k)$: p.d.f. $\qquad g(y_1, \cdots, y_r)$: p.d.f.

のときには、

① ※を、たとえば $X_1, \cdots, X_r$ について解き、r個の関数

$$x_j = x_j^*(y_1, \cdots, y_r, x_{r+1}, \cdots, x_k) \qquad (j = 1, \cdots, r)$$

の（若干個の）組をうる。

② $h(y_1, \cdots, y_r, x_{r+1}, \cdots, x_k)$

$$= \sum_* f(x_1^*, \cdots, x_r^*, x_{r+1}, \cdots, x_k) \left| \frac{\partial(x_1^*, \cdots, x_r^*)}{\partial(y_1, \cdots, y_r)} \right|$$

③ $g(y_1, \cdots, y_r) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(y_1, \cdots, y_r, x_{r+1}, \cdots, x_k)\, dx_k \cdots dx_{r+1}$.

として求められる。ただし、$\dfrac{\partial(x_1^*, \cdots, x_r^*)}{\partial(y_1, \cdots, y_r)}$ は、$\dfrac{\partial x_i^*}{\partial y_j}$ を(i, j)要素とする Jacobian。

練習問題 3

3-1. X_1, X_2 なる確率変数が独立であるなら、$Y_1 = \varphi_1(X_1)$, $Y_2 = \varphi_2(X_2)$ なる２つの変数も統計的に独立となることを示せ。ただし φ_1, φ_2 はB-可測な連続関数とする。

3-2 連続型確率変数 X （p.d.f. $f(x)$, c.d.f. $F(x)$）について、

(1) $F(x / a < x \leq b)$. (2) $f(x / a < x \leq b)$ を求めよ。

3-3 X : $f(x) \begin{cases} = 1 & (0 < x < 1) \\ = 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $Y = 3X + 1$ のとき、$g(y)$: p.d.f. を求む。

3-4. X_1, X_2 $\Longrightarrow$ $Y_1 = X_1^2$, $Y_2 = X_2^2$ と変換したとき

$f(x_1, x_2) = 4x_1 x_2 \ (0 < x_1, x_2 < 1)$
$\qquad = 0 \quad (\text{otherwise})$

$g(y_1, y_2)$: p.d.f. を求む

3-5 X_1, X_2 $\Longrightarrow$ $Y_1 = \varphi(X_1, X_2)$ の変換を次のように行なうとき、

$f(x_1, x_2)$: p.d.f $\qquad g(y)$: p.d.f. を求めよ。

(1) $Y_1 = X_1 + X_2$

(2) $Y_1 = X_1 - X_2$

(3) $Y_1 = X_1 \cdot X_2$

(4) $Y_1 = X_1 / X_2$

3-6 X $\Longrightarrow$ $Y = X^2$ と変換するとき、

$f(x) = e^{-x} \quad (x \geq 0)$
$\qquad = 0 \quad (\text{otherwise})$

$g(y)$: p.d.f. を求む。

3-7 X_1, X_2 $\Longrightarrow$ $Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $Y_2 = \tan^{-1} \dfrac{X_2}{X_1}$ と変換したとき、

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}}$$

$$(-\infty < x_1, x_2 < \infty)$$

$g(y_1, y_2)$: p.d.f. を求む。

（解答は、31ページ）

4　特性関数

密度 $f(x)$ をもつ確率変数 X に対して、その特性関数 (characteristic function) $\varphi(t)$ を、つぎのように定義する。(これは、フーリエ変換として知られる。)

(4-1)　Df.　(連続型)　$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$

(4-2)　Df.　(離散型)　$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \sum_{x} e^{itx} f(x)$

(4-3)*　$\varphi(0) = 1$

(4-4)*　$|\varphi(t)| \leqq 1$

(4-5)*　$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

(4-6)　Th.　(Lévyの1意性定理)　2つの確率変数が同じ特性関数をもつならば、それらは同じ分布関数をもつ。

(証明は省略するが Hoel-Port-Stone [1971=1973:171], Wilks [1962=1971:118] などをみよ。)

密度 $f(x)$ をもつ確率変数 X に対して、その積率母関数 (moment generating function) $M(t)$ を、つぎのように定義する。

(4-7)　Df.　$M(t) = E(e^{tX}) = \varphi\left(\frac{t}{i}\right)$

(4-8)　Df.　$m^{\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{\nu} f(x)\,dx$　: ν次のモーメント(積率)

(4-9)*　$\varphi^{(\nu)}(t) = i^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\nu} e^{itx} f(x)\,dx$　: $\varphi(t)$のν次導関数

(4-10)*　$\varphi^{(\nu)}(0) = i^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\nu} f(x)\,dx = i^{\nu} m^{\nu}$

(4-11)*　$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(it)^{\nu} m^{\nu}}{\nu!} + o(k) = 1 + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(it)^{\nu} m^{\nu}}{\nu!}$

: Maclaurin 展開　　　infinitesimal of high order

(4-11)式からえられる結論は 全てのモーメントが得られたら X の特性関数は決定される、ということであり、(4-6)によればそれはすなわち、X の分布が決定されることに他ならない。

(4-12)　X :　$f(x) \rightleftarrows \varphi(t) \rightleftarrows m^{\nu}\ (\nu = 1, \cdots, k)$

多数の確率変数の結合分布については、次のように特性関数を定める:

(4-13)　Df.　(連続型)　$\varphi(t_1, \cdots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n)} f(x_1, \cdots, x_n)\,dx_n \cdots dx_1$

あるいは、$\varphi(t) = \int_{\Omega} e^{itx} f(x)\,dx$

(4-14)　Df.　(離散型)　$\varphi(t_1, \cdots, t_n) = \sum e^{i(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n)} f(x_1, \cdots, x_n)$

あるいは、$\varphi(t) = \sum e^{itx} f(x)$

$X : f(x)$ を、ϕ によって、$Y = \phi(X) : g(y)$ に変換したとき、特性関数を次のように定める。

(4-15)　Df.　$\varphi_{\phi(X)}(t) = E(e^{it\phi(X)})$

(4-16)*　$\varphi_{aX+b}(t) = e^{bit} \varphi(at)$　　$X \longrightarrow aX+b$: 線型変換

(4-17)*　$\varphi_{\frac{X-m}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{mit}{\sigma}} \varphi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$　　$X \longrightarrow \frac{X-m}{\sigma}$: 標準化

(4-18)*　X_1, X_2 : 独立 $\iff \varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t)$

(4-19)*　$X_1, \cdots, X_n$: 独立 $\iff \varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \cdots \cdot \varphi_{X_n}(t)$

(4-20)*　$X_1, \cdots, X_n$: 独立 $\iff \varphi_{\sum a_iX_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(a_i t)$

(4-21)　Df.　(Gamma Function)　$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} x^z e^{-x}\,dx$

(4-22)*　$\int_0^{\infty} t^z e^{-at}\,dt = a^{-(z+1)}\,\Gamma(z+1)$

(4-23)* (i) $\int_0^\infty t^{2z+1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 2^z \Gamma(z+1)$

(ii) $\int_0^\infty t^{2z+1} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \Gamma(z+1)$

(4-24)* (i) $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2}\, \Gamma(\frac{1}{2})$

(ii) $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \Gamma(\frac{1}{2})$

(4-25)* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

(4-26)* $\Gamma(n+1) = n!$ n: 正の整数

(4-27)* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(4-28)* $\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2}) = 2^{1-n}\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)$

(4-29) Df. (gamma distribution) (Wilks [1962=1971: 170])

(i)
$$f(x) \begin{cases} = \dfrac{x^{\mu-1} e^{-x}}{\Gamma(\mu)} & (x>0) \quad (\mu>0) \\ = 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

あるいは、

(ii)
$$f(x;\alpha,\mu) \begin{cases} = \dfrac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} x^{\mu-1} e^{-\alpha x} & (x>0) \\ = 0 \end{cases}$$

(4-30) Df. (beta function)
$$B(p+1, q+1) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx \quad (-1 < p, q < \infty)$$

(4-31)* $B(p+1, q+1) = B(q+1, p+1)$

(4-32)* $B(p+1, q+1) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}\theta \cos^{2q+1}\theta \, d\theta$

(4-33)* $B(p+1, q+1) = \dfrac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}$

(4-34) Df. (beta distribution)
$$f(x) \begin{cases} = \dfrac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2) x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} & (0<x<1) \quad \text{注)} \\ = 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

注) (4-33)からこれは、 $\dfrac{x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}}{B(\alpha_1, \alpha_2)}$ とかけることが明らか。

X_i $(i=1,\cdots,n)$: 互いに独立 $\Longrightarrow \chi_n^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$

$f_i(x) = N(0,1)$ カイ自乗 (chi square) $f(x)$: p.d.f.

(4-35)* $\varphi_{\chi_n^2}(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$

(4-36)*
$$f(x) \begin{cases} = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & (x>0) \\ = 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$
カイ自乗分布

(4-37)* $F(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt \quad (x>0)$

(4-38)* $E(\chi_n^2) = n$

(4-39)* $Var(\chi_n^2) = E[(\chi_n^2 - E(\chi_n^2))^2] = 2n$

(4-40)* $\chi_{n_1}^2 + \chi_{n_2}^2 = \chi_{n_1+n_2}^2$

(4-41)* $\chi^2_{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \sum_{i=1}^{n} \chi_{n_i}^2$

X_i $(i=1,\cdots,n+1)$ 互いに独立 $\Longrightarrow t = \dfrac{X_{n+1}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}}}$ t分布 注)

$f_i(x) = N(0,\sigma)$ $s(x)$: p.d.f.

(4-42)* $s(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \dfrac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$ (自由度n)

(4-43)* t分布の平均 $m_t = E(t) = 0$

分散 $\sigma_t^2 = E((t-m_t)^2) = \dfrac{n}{n-2}$

(4-44) Th. tが自由度nの t分布に従うとき、 $x = \dfrac{1}{1+\frac{t^2}{n}}$ は ベータ分布 $B(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2})$ をもつ。

(Wilks [1962=1971: 184])

注). t分布を、Student 分布ともいう。

U, Vは互いに独立で，自由度m, nのχ^2分布。

$X_i \quad (i=1,\cdots,m)$ 互いに独立

$f_i(x) = N(0, \sigma)$

$Y_i \quad (i=1,\cdots,n)$ 互いに独立

$f_i(y) = N(0, \sigma)$

$$\Longrightarrow f_{m,n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i^2/m}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2/n} = \frac{U/m}{V/n}$$

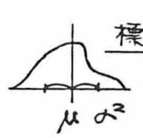
$f_{m,n}$：自由度m, nのF分布 注)

注) スネデッカー分布 (Snedecor distribution) とよぶこともある。

(4-45)* $\quad X = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}$ とおると，そのp.d.f.は
$$\begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \dfrac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(x+1)^{\frac{m+n}{2}}} & (x>0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

(4-46)*
$$f_{m,n}(x) \begin{cases} = \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} & (x>0) \\ = 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

(4-47)* F分布 (4-46) の平均 $\dfrac{n}{n-2}$，分散 $\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$



$\xrightarrow{\text{標本}} X_1, \ldots, X_n \Longrightarrow Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (標本和)

$\bar{x} = Z/n$ (標本平均)

(4-48)* Th.
$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{Z-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq y\right] = \lim_{n\to\infty} P\left[\frac{\sqrt{n}\,(\bar{x}-\mu)}{\sigma} \leq y\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

上が成立するとき，Zは，十分大きなnに対しては，$N(n\mu, n\sigma^2)$に従って漸近的に正規分布をしている，という。(Wilks [1962=1971:252])

(4-49)* Th (De Moivre − Laplace)

X : binominal $B_i(n, p) \Longrightarrow Z = \sum_{i=1}^{n} X_i \fallingdotseq N(np, npq)$

(4-50) 中心極限定理 (central limit theorem)

$X_i \quad (i=1,\cdots,n) \qquad \Longrightarrow Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$m_{x_i} = \mu_i;\ \sigma_{x_i}^2 = \sigma_i^2; \qquad m_n = \sum \mu_i$

$f_i(x)$: p.d.f. $\qquad \tau_n^2 = \sum \sigma_i^2,\ \tau_n^{*2} = \sum \sigma_i^{*2}$

ただし

(4-51)
$$\sigma_i^{*2} = \int_{\mu_i-\varepsilon\tau_n}^{\mu_i+\varepsilon\tau_n} (x-\mu_i)^2 f_i(x)\,dx \qquad (i=1,\cdots,n)$$

そこで

(4-52)
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_n-m_n}{\tau_n} \leq y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

が成立つための必要十分条件は，任意の$\varepsilon>0$に対して，

(4-53)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n^{*2}}{\tau_n^2} = 1, \qquad かつ, \quad \lim_{n\to\infty} \tau_n^2 = \infty$$

が成立つことである。

中心極限定理の証明は，ややこみいっているので，入門程度の教科書には載っていないが，積率母関数 (m.g.f) が存在する特別な場合について，証明がひかれている。

練習問題 4

4-1. (4-3).(4-4).(4-5)を示せ。

4-2 (4-9)を示せ。

4-3 (4-10)を示せ。

4-4 (4-11)を示せ。

4-5 次の分布の特性関数を求む。① 2項分布 ② ポアソン分布 ③ 多項分布. ④ 一様分布.

4-6 (4-16).(4-17)を示せ.

4-7 (4-18).(4-19).(4-20)を示せ。

4-8 ガンマ関数の性質, (4-22)～(4-28)を示せ。

4-9 ベータ関数の性質, (4-31)～(4-33)を示せ。

4-10 次の分布の特性関数を求めよ。① 正規分布 $N(0,1)$, $N(0,\sigma)$, $N(m,\sigma)$ ② ガンマ分布。

4-11 ① 互いに独立な2つの2項分布する確率変数 $X_1 : b(n_1,p)$, $X_2 : b(n_2,p)$ がある。$Y=X_1+X_2$ のとき, その特性関数, および p.d.f. を求めよ。
② 互いに独立な2項分布する確率変数 $X_i : b(n_i,p)$ $(i=1,\cdots,n)$ がある。$Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ のとき, その特性関数と p.d.f. を求めよ。

4-12 互いに独立な Poisson 分布する確率変数 $X_i : p_0(m_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ がある。$Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ のとき, その特性関数と, p.d.f. を求めよ。

4-13 互いに独立な, 確率変数 $X_i : N(m_i,\sigma)$ $(i=1,\cdots,n)$ がある。$\sum_{i=1}^{n} X_i$ の特性関数, ならびに p.d.f を求めよ。

4-14 $X : N(0,1)$ のとき, $Y=X^2$ の p.d.f. ならびに特性関数を求めよ。

4-15 (4-35) (χ^2分布の特性関数) を示せ。

4-16 χ^2分布の性質, (4-36)～(4-41)を示せ。

4-17 $X_i : N(0,\sigma)$ $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ の p.d.f. を求む。

4-18 $X_i : N(0,\sigma)$ $(i=1,\cdots,n)$ とする。次のものを確率変数とする, p.d.f. を求む。

① $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$ ② $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ ③ $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}$

4-19 (4-42)を導け。

4-20 (4-43)を示せ。

4-21 (4-45)を導け。

4-22 (4-46)を導け。

4-23 (4-47)を示せ。

4-24 (4-48)を示せ。

4-25 (4-49)を示せ。

Hoel, P.G., Port, S.C., & Stone, C.J. 1971 Introduction to Probability Theory, Houghton Mifflin Co. =1973 安田正実訳,『確率論入門』,東京図書.

Wilks, S.S. 1944 Mathematical Statistics, Princeton University Press. =1952 小笠原正己訳,『数理統計学』, 有文社.

——— 1962 Mathematical Statistics(2nd ed.), John Wiley & Sons. =1971 田中英之・岩本誠一訳,『数理統計学〈増訂新版〉(1)(2)』,東京図書.

解答

1-1 (1-13) $P(E)+P(E^c)=P(E+E^c)$ (∵ (1-11); $E\cap E^c=\emptyset$)

$=P(\Omega)$ (∵ Df.)

$=1$ (∵ (1-13))

(1-14) $1=P(\Omega)$ (∵ (1-13))

$=P(\Omega\cup\emptyset)$ (∵ Df.)

$=P(\Omega+\emptyset)$ (∵ $\Omega\cap\emptyset=\emptyset$)

$=P(\Omega)+P(\emptyset)$ (∵ (1-12))

$=1+P(\emptyset)$ (∵ (1-13))

∴ $P(\emptyset)=1-1=0$

(1-15) $P(E_2)=P(E_1+E)$ ($E=E_2-E_1$)

$=P(E_1)+P(E)$ (∵ (1-11))

$\geqq P(E_1)$ (∵ (1-10))

(1-16) $P(E_1)=P((E_1-E_2)+(E_1\cap E_2))$

$=P(E_1-E_2)+P(E_1\cap E_2)$ (∵ (1-11))

∴ $P(E_1-E_2)=P(E_1)-P(E_1\cap E_2)$

$E_1\geqq E_2\rightarrow E_1\cap E_2=E_2$ より，後半は自明。

(1-17) $P(E_1\cup E_2)=P((E_1-E_2)+(E_1\cap E_2)+(E_2-E_1))$

$=P(E_1-E_2)+P(E_1\cap E_2)+P(E_2-E_1)$ (∵ (1-11))

$=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)$ (∵ (1-16))

後半も，(1-14)などより，自明。

(1-18) (1-17)より，自明

(1-19) $P(A)=P(A\cap\Omega)$ (∵ Df.)

$=P(A\cap(E_1+E_2+\cdots+E_n))$ (∵ 仮定)

$=P((A\cap E_1)+(A\cap E_2)+\cdots+(A\cap E_n))$ (∵ 分配則)

$=P(A\cap E_1)+P(A\cap E_2)+\cdots+P(A\cap E_n)$ (∵ (1-11))

$=\sum_{j=1}^{n}P(A\cap E_j)$

$=\sum_{j=1}^{n}P(E_j)\cdot P(A/E_j)$ (∵ (1-18))

この結果を用いれば，自明。

1-2 成立しない。反例：連続量を考えるとよい。たとえば，体重がちょうど60kgになる確率はゼロだが，しかし絶対におきないということはない。

1-3. ほとんど自明

1-4 $np=m$ より，$p=\frac{m}{n}$。

$${}_nC_r\,p^r(1-p)^{n-r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^r\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-r}$$

$$=\frac{1}{r!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r}\cdot m^r\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-r}$$

$$=\frac{m^r}{r!}\cdot1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{m}{n}\right)^n\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-r}$$

$$\lim_{n\to\infty}1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^r=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^n=\lim_{x\to0}(1+x)^{-\frac{m}{x}}=\left[\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{-m}=e^{-m}\qquad\left(-\frac{m}{n}=x\ \text{即}\ n=-\frac{m}{x}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}{}_nC_r\,p^r(1-p)^{n-r}=\frac{m^r e^{-m}}{r!}$$

1-5 ポアソン分布にあてはめる。$r=382$, $t=100$, $k=5$, $m=kt=500$

$$P(382)=\frac{e^{-500}(500)^{382}}{382!}$$

1-6 同じく，$r=150$, $t=12$, $k=10$, $m=kt=120$

$$P(150)=\frac{e^{-120}(120)^{150}}{150!}$$

1-7 $k=0.03$ $t=100$ $m=kt=3$

$$P(1)+P(2)=\frac{e^{-3}3^1}{1!}+\frac{e^{-3}\cdot3^2}{2!}=\frac{15}{2}e^{-3}$$

1-8 (x,x,y,y,z)

x,yのえらび方 ${}_{13}C_2$

数xは，4枚から2枚えらばれる ${}_4C_2$

数yも，4枚から2枚えらばれる ${}_4C_2$

数zは，のこり11種から1枚えらばれる $11\times{}_4C_1$

$$\therefore\ \frac{{}_{13}C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_4C_2\cdot11\cdot{}_4C_1}{{}_{52}C_5}$$

1-9 $x-1$ 枚のあいだ Kは出ないのだから，そのめくり方(順列)は，${}_{48}P_{x-1}$ 通り，
x 枚目の Kの出方は ${}_4P_1$ 通り。

$$\therefore\ \frac{{}_{48}P_{x-1}\times4}{{}_{52}P_x}$$

1-10 365日のなかから n日(すべて異なる)をとりだして並べる順列と考えればよい：

$$\therefore\ \frac{{}_{365}P_n}{(365)^n}=\frac{365\cdot364\cdot\cdots\cdot(365-n+1)}{365^n}$$

$$=\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{365}\right)$$

1-11 $\dfrac{{}_nC_x \cdot {}_mC_{k-x}}{{}_{n+m}C_k}$

1-12 $P(x,y) = \dfrac{6!}{x!\,y!\,(6-x-y)!}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{1}{6}\right)^y\left(\frac{4}{6}\right)^{6-x-y}$

1-13 少なくとも1枚10以上である確率、すべて7以上で少なくとも1枚が10以上である確率を、それぞれ p_1, p_2 とすれば、

$$p_1 = \frac{{}_{52}C_5 - {}_{36}C_5}{{}_{52}C_5}, \quad p_2 = \frac{{}_{32}C_5 - {}_{12}C_5}{{}_{52}C_5}$$

求める確率(条件付)は、 $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{{}_{32}C_5 - {}_{12}C_5}{{}_{52}C_5 - {}_{36}C_5}$

2-1 $P(a < x \leq b) = P(\{x \mid x \leq b\} \cap \{x \mid x \leq a\}^c)$

$= P(x \leq b) - P(x \leq a)$ （∵ (1-16)）

$= F(b) - F(a)$ （∵ (2-8)）

2-2 (i) 自明 （∵ (1-10), (2-8)）

(ii) $a \leq b$ に対して、 $F(b) - F(a) = P(a < X \leq b)$ （∵ (2-9)）

≥ 0 （∵ (1-10)）

より、明らか。

(iii) $B_n = \{e \mid X(e) \leq n\}$ とおくと、

$$\cdots \subseteq B_{-2} \subseteq B_{-1} \subseteq B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \cdots$$

また、 $\bigcap_{n=0}^{-\infty} B_n = \emptyset$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \Omega$ であるから、

$\lim_{n\to-\infty} P(B_n) = P(\emptyset)$ （∵ (1-11) ↳ Hoel-Port-Stone [1971=1973:11f]）

$= 0$ （∵ (1-14)）

$\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P(\Omega)$ （∵ (1-11) ↳ Hoel-Port-Stone [1971=1973:11f]）

$= 1$ （∵ (1-12)）

$F(n) = P(X \leq n) = P(B_n)$ であるから、

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(n) = \lim_{x\to-\infty} P(B_n) = 0$$

同様に、 $F(+\infty) = 1$。

(iv) 略 （↳ Hoel-Port-Stone [1971=1973:96]）。

2-3 (1) $f(x) \geq 0$ は明らか。また、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{2} 0\,dx + \int_{2}^{4} \frac{1}{18}(3+2x)\,dx + \int_{4}^{\infty} 0\,dx = \frac{1}{18}\left[3x+x^2\right]_2^4 = 1.$$

(2) $P(2 < x < 3) = \int_2^3 \frac{1}{18}(3+2x)\,dx = \frac{1}{18}\left[3x+x^2\right]_2^3 = \frac{4}{9}$

2-4 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0$ は明らか。また、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,x_3,x_4)\,dx_4 dx_3 dx_2 dx_1$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 16x_1x_2x_3x_4\,dx_4 dx_3 dx_2 dx_1 + 0$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 8x_1x_2x_3\,dx_3 dx_2 dx_1 = \int_0^1\int_0^1 4x_1x_2\,dx_2 dx_1 = \int_0^1 2x_1\,dx_1 = \left[x_1^2\right]_0^1 = 1.$$

2-5 (1) $f(x) \geq 0$ は明らか。また、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_1^e \frac{1}{x}\,dx + \int_e^{\infty} 0\,dx = \left[\log x\right]_1^e = 1$$

(2) $P(\sqrt[3]{e} \leq x \leq \sqrt{e}) = \int_{\sqrt[3]{e}}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\,dx = \left[\log x\right]_{\sqrt[3]{e}}^{\sqrt{e}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

2-6 $f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_2 = \int_{-\infty}^{2} 0\,dx_2 + \int_2^4 \frac{1}{8}(6-x_1-x_2)\,dx_2 + \int_4^{\infty} 0\,dx_2$

$= \frac{1}{8}\left[6x_2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2\right]_2^4 = \frac{1}{8}(12-2x_1-6) = \frac{1}{4}(3-x_1)$. 同様に

$f_2(x_2) = \frac{1}{4}(5-x_2)$

2-7. (1) $F_1(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f_1(x_1)\,dx_1 = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_2 dx_1$ （∵ (2-20)）

$= F(x_1, \infty)$

(2) $F_2(x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} f_2(x_2)\,dx_2 = \int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$ （∵ (2-20)）

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2)\,dx_2 dx_1 = F(\infty, x_2)$

2-8

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_n\cdots dx_2\,dx_1$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)\,dx_n\cdots dx_2\,dx_1 \quad (\because (2\text{-}24))$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\,dx_1\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2)\,dx_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_n)\,dx_n$$

$$=F_1(x_1)\,F_2(x_2)\cdots F_n(x_n) \quad \because (2\text{-}24)\Rightarrow(2\text{-}25)$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}F_1(x_1)\cdot F_2(x_2)\cdots F_n(x_n) \quad (\because (2\text{-}25))$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}F_1(x_1)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}F_2(x_2)\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}F_n(x_n)$$

$$=f_1(x_1)\cdot f_2(x_n),\cdots f_n(x_n) \quad \because (2\text{-}25)\Rightarrow(2\text{-}24)$$

2-9.

$$f(x_2/x_1)=\frac{f(x_1,x_2)}{f_1(x_1)}=\frac{\frac{1}{8}(6-x_1-x_2)}{\frac{1}{4}(3-x_1)}=\frac{6-x_1-x_2}{2(3-x_1)} \quad \left(\begin{array}{l}0\leq x_1\leq 2\\ 2\leq x_2\leq 4\end{array}\right)$$

$$=0 \quad (\text{otherwise})$$

2-10.

$$E(X_1+X_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1+x_2)\,f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1 f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_2 f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1+\int_{-\infty}^{\infty}x_2\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1 f_1(x_1)\,dx_1+\int_{-\infty}^{\infty}x_2 f_2(x_2)\,dx_2=E(X_1)+E(X_2)$$

この結果は、$\underline{m_{X+Y}=m_X+m_Y}$ としても表示できる。 $(\because (2\text{-}29)\,(i))$

2-11

(i) $\sigma_X^2=E((X-m_X)^2)$ $(\because (2\text{-}29)(ii))$

$$=E(X^2-2m_X X+m_X^2)$$

$$=E(X^2)-E(2m_X X)+E(m_X^2) \quad (\because (2\text{-}28)\,(ii))$$

$$=E(X^2)-2m_X E(X)+m_X^2 \quad (\because (2\text{-}28)\,(i))$$

$$=E(X^2)-m_X^2 \quad (\because (2\text{-}29)\,(i))$$

(ii) $m_{aX+b}=E(aX+b)=aE(X)+b=a\,m_X+b.$ (*)

$$\sigma_{aX+b}^2=E((aX+b-m_{aX+b})^2) \quad (\because (2\text{-}29)(ii))$$

$$=E((aX+b-am_X-b)^2) \quad (\because (*))$$

$$=E((aX-am_X)^2)$$

$$=a^2E((X-m_X)^2) \quad (\because (2\text{-}28)\,(i))$$

$$=a^2\cdot\sigma_X^2 \quad (\because (2\text{-}29)\,(ii))$$

(iii) (ii)において、$a=\frac{1}{n}$, $b=0$ とおくと、

$$\sigma_{\frac{X}{n}}^2=\frac{1}{n^2}\sigma_X^2$$

(iv) $\sigma_{X+Y}^2=E((X+Y-m_{X+Y})^2)$ $(\because (2\text{-}29)\,(ii))$

$$=E((X+Y-m_X-m_Y)^2) \quad (\because (2\text{-}28)\,(ii))$$

$$=E((X-m_X)^2+2(X-m_X)(Y-m_Y)+(Y-m_Y)^2)$$

$$=E((X-m_X)^2)+2E((X-m_X)(Y-m_Y))+E((Y-m_Y)^2)$$

$$=\sigma_X^2+2\,\mathrm{cov}(X,Y)+\sigma_Y^2 \quad (\because (2\text{-}29)\,(ii)(iii))$$

$$=\sigma_X^2+2\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y+\sigma_Y^2 \quad (\because (2\text{-}29)\,(iv))$$

2-12

(1) $X+1$

x :	2	3	4	5	6	7
$f(x)$:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

(2) $2X$

x :	2	4	6	8	10	12
$f(x)$:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

(3) X^2

x :	1	4	9	16	25	36
$f(x)$:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2-13. X

x:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$.	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$F(x)$	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	1

$$m_X=E(X)=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+\cdots+12\cdot\frac{1}{36}=7.$$

$$\sigma_X^2=E(X^2)-m_X^2=2^2\cdot\frac{1}{36}+3^2\cdot\frac{2}{36}+\cdots+12^2\cdot\frac{1}{36}-7^2\fallingdotseq 5.83$$

3-1. $G(y_1, y_2) = P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2)$

$$= P(\varphi_1(X_1) \leq y_1, \varphi_2(X_2) \leq y_2)$$

$$= P(X_1 \in \varphi_1^{-1}[(-\infty, y_1)], X_2 \in \varphi_2^{-1}[(-\infty, y_2)]) \quad \text{注)}$$

$$= P(X_1 \in \varphi_1^{-1}[(-\infty, y_1)]) \cdot P(X_2 \in \varphi_2^{-1}[(-\infty, y_2)]) \quad (\because \text{独立})$$

$$= P(\varphi_1(X_1) \leq y_1) \cdot P(\varphi_2(X_2) \leq y_2)$$

$$= G_1(y_1) \cdot G_2(y_2)$$

注) $\varphi_i^{-1}[(-\infty, y_i)] = \{x_i \mid \varphi_i(x_i) \leq y_i\}$

3-2. (1)
$$F(x / a < x \leq b) \begin{cases} = 0 & (x \leq a) \\ = \dfrac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} & (a < x \leq b) \\ = 1 & (b < x) \end{cases}$$

(2)
$$f(x / a < x \leq b) \begin{cases} = 0 & (\text{otherwise}) \\ = \dfrac{f(x)}{\int_a^b f(x)\,dx} & (a < x \leq b) \end{cases}$$

3-3. $Y = 3X + 1$ より. $X = \frac{1}{3}(Y - 1)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$

$$g(y) = 1 \cdot \left|\frac{dy}{dx}\right| = \frac{1}{3} \quad (1 < y < 4)$$

$$= 0 \quad (\text{otherwise})$$

(別解) $G(y) = P(Y < y) = P(3X + 1 < y) = P(X < \frac{1}{3}(y - 1))$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{1}{3}(y-1)} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}(y-1)} 1\,dx = \frac{1}{3}(y - 1)$$

$$g(y) = \frac{1}{3} \quad (1 < y < 4)$$

3-4 $g(y_1, y_2) = f(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}\right| \quad (\because (3\text{-}7))$

$$= f(\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}) \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{y_2}} \end{vmatrix}$$

$$= 4\sqrt{y_1 y_2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{y_1 y_2}} = 1 \quad (0 < y_1, y_2 < 1)$$

$$g(y_1, y_2) = 0 \quad (\text{otherwise})$$

3-5. (1)
$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} X_1 = Y_1 - Y_2 \\ X_2 = Y_2 \end{cases} \quad \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}\right| = \left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| = 1$$

$$g(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}\right|$$

$$= f(y_1 - y_2, y_2)$$

$$g(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, y_2)\,dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1 - y_2, y_2)\,dy_2$$

(2) (1)と同様に, $g(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, y_2)\,dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1 + y_2, y_2)\,dy_2$

(3)
$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \cdot X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} X_1 = Y_1 / Y_2 \\ X_2 = Y_2 \end{cases} \quad \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{1}{y_2} & -\frac{y_1}{y_2^2} \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{|y_2|}$$

$$g(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}\right| = f\left(\frac{y_1}{y_2}, y_2\right) \cdot \frac{1}{|y_2|}$$

$$g(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y_1}{y_2}, y_2\right) \cdot \frac{1}{|y_2|}\,dy_2$$

(4)
$$\begin{cases} Y_1 = X_1 / X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} X_1 = Y_1 Y_2 \\ X_2 = Y_2 \end{cases} \quad \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}\right| = \left\|\begin{matrix} y_2 & y_1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| = |y_2|$$

$$g(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}\right| = f(y_1 y_2, y_2) \cdot |y_2|$$

$$g(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1 y_2, y_2) \cdot |y_2|\,dy_2$$

3-6. $Y = X^2 \rightsquigarrow X = \sqrt{Y}$ $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$g(y) = e^{-x} \left|\frac{dx}{dy}\right| = e^{-\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad (0 \leq y)$$

3-7
$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & (y_1 \geq 0) \\ y_2 = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} & (0 \leq y_2 \leq 2\pi) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \cos y_2 \\ x_2 = y_1 \sin y_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \cos y_2 & -y_1 \sin y_2 \\ \sin y_2 & y_1 \cos y_2 \end{vmatrix} = y_1$$

$$\therefore g(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}\right| = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{y_1^2}} \cdot y_1$$

4-1. $\varphi(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$　または $\varphi(0)=\sum_x f(x)=1$

$$|\varphi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}|\cdot|f(x)|\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \qquad (*)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

(（*）の変形で $|e^{itx}|=1$ を用いている，というのは，Eulerの公式より
$e^{itx}=\cos tx + i\sin tx$ であるから。（Hoel-Port-Stone［1971=1983:166f］）

$$\varphi(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x)\,dx = \overline{\varphi(t)}$$

4-2 $\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx = i\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{itx} f(x)\,dx$

$$\varphi^{(\nu)}(t) = i^{\nu}\int_{-\infty}^{\infty} x^{\nu} e^{itx} f(x)\,dx$$

4-3 $\varphi^{(\nu)}(0) = i^{\nu}\int_{-\infty}^{\infty} x^{\nu} f(x)\,dx = i^{\nu} m^{\nu}$　（∵ (4-e)）

4-4 $\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\varphi^{(\nu)}(0)}{\nu!} t^{\nu} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\theta t)}{(k+1)!} t^{k+1}$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(it)^{\nu} m^{\nu}}{\nu!} + o(k) \qquad (∵(4\text{-}3))$$

4-5. ① 2項分布　$f(x) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$

$$\varphi(t) = E(e^{itx}) = \sum_{i=0}^{n} e^{itx}\, {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} {}_nC_x\, (e^{it}p)^x q^{n-x} = (pe^{it}+q)^n$$

② ポアソン分布　$f(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$

$$\varphi(t) = E(e^{itx}) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{itx} e^{-m} m^x}{x!} = e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e^{it}m)^x}{x!}$$

$$= e^{-m} e^{me^{it}} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-me^{it}}(me^{it})^x}{x!}$$

$$= e^{-m} e^{me^{it}} = e^{-m(1-e^{it})}$$

（因みに，$\varphi'(t) = im\,e^{it}\cdot e^{-m(1-e^{it})}$　$\varphi'(0)=im$　∵ $E(x)=m$　（∵(4-10)）（平均）
$\varphi''(t) = \{i^2 m e^{it} + (ime^{it})^2\}\cdot e^{-m(1-e^{it})}$
$\varphi''(0) = i^2(m+m^2)$　∴ $E(x^2)=m+m^2$
∴ $\sigma_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = m+m^2-m^2 = m$ （分散））

③ 多項分布　$f(x_1,\cdots,x_r) = \frac{n!}{x_1!\cdots x_r!} p_1^{x_1}\cdots p_r^{x_r}$

$$\varphi(t_1,\cdots,t_r) = \sum e^{i(t_1x_1+\cdots+t_rx_r)} \frac{n!}{x_1!\cdots x_r!} p_1^{x_1}\cdots p_r^{x_r}$$

$$= \sum \frac{n!}{x_1!\cdots x_r!} (p_1e^{it_1})^{x_1}\cdots(p_re^{it_r})^{x_r}$$

$$= (p_1e^{it_1}+\cdots+p_re^{it_r})^n$$

④ 一様分布　$f(x) = \frac{1}{b-a}$　$(b<x<a)$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\cdot\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{it}e^{itx}\right]_a^b$$

$$= \frac{e^{it}(e^b-e^a)}{it(b-a)}$$

4-6 (4-16) $\varphi_{ax+b}(t) = E(e^{it(ax+b)}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itax+itb} f(x)\,dx$

$$= e^{bit}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iatx} f(x)\,dx = e^{bit}\varphi(at)$$

(4-17) $\frac{x-m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}x - \frac{m}{\sigma}$．よって，(4-16)で $a=\frac{1}{\sigma}$，$b=-\frac{m}{\sigma}$ とおけば，

$$\varphi_{\frac{x-m}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{mit}{\sigma}}\varphi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

4-7 (4-18) $\varphi_{X_1+X_2}(t) = E(e^{it(x_1+x_2)}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x_1+x_2)} f(x_1,x_2)\,dx_2dx_1$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx_1} f(x_1)\,dx_1\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx_2} f(x_2)\,dx_2 \qquad (∵ 独立)$$

$$= \varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t)$$

(4-19)　(4-18)より，数学的帰納法による。

(4-20)　(4-16)(4-19)より明らか。

4-8 (4-22) $x=at$ とおく。$dx=a\,dt$　$0\leq x=at\leq\infty$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} x^z e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} (at)^z e^{-at}\cdot a\,dt = \int_0^{\infty} a^{z+1} t^z e^{-at}\,dt$$

$$∴\ a^{-(z+1)}\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-at}\,dt$$

(4-23)(i) $x=\frac{1}{2}t^2$ とおく。$dx=t\,dt$　$0\leq x=\frac{1}{2}t^2\leq\infty$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} x^z e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}t^2\right)^z e^{-\frac{1}{2}t^2}\cdot t\,dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{2^z}\cdot t^{2z+1} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

$$∴\ 2^z\cdot\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^{2z+1} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

(4-23) (ii) $x=t^2$ とおく　$dx=2t\,dt$

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty x^z e^{-x}dx=\int_0^\infty t^{2z}e^{-t^2}2t\,dt=\int_0^\infty 2\cdot t^{2z+1}e^{-t^2}dt$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\Gamma(z+1)=\int_0^\infty t^{2z+1}e^{-t^2}dt$$

(4-24) (i)　(4-23)(i)で, $z=-\frac{1}{2}$ とおくと.

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2})\quad \text{すなわち,}\quad \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\sqrt{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

(ii)　(4-23)(ii)で, $z=-\frac{1}{2}$ とおくと.

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})\quad \text{すなわち,}\quad \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt=\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

(4-25)

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty x^z e^{-x}dx=\Big[x^z(-e^{-x})\Big]_0^\infty-\int_0^\infty z x^{z-1}(-e^{-x})dx$$

$$=z\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx\ =z\,\Gamma(z)$$

(4-26) $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!\,\Gamma(1)=n!$

$$\left(\because\ \Gamma(1)=\int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty=1\right)$$

(4-27)　(4-24)の(ii)より. $\Gamma(\frac{1}{2})=\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy$

$$\left\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\right\}^2=\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx\cdot\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx\quad (*)$$

ここで! 極座標への変換を行なう, すなわち.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}r\\\theta\end{pmatrix}\qquad \begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\qquad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=\left\|\begin{matrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & -r\cos\theta\end{matrix}\right\|=r.$$

$$(*)=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-t}\cdot\frac{1}{2}dt\,d\theta=\int_0^{2\pi}\Big[-\frac{1}{2}e^{-t}\Big]_0^\infty d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta$$

$r^2=t$ とおくと. $2r\,dr=dt$

$$=\Big[\frac{1}{2}\theta\Big]_0^{2\pi}=\pi\qquad\qquad \therefore\ \Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

(4-28) (i) $n=2m$ のとき,

$$\Gamma(\tfrac{n}{2})=\Gamma(m)=\overbrace{\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-n+2}{2}}^{m-1}\cdot\Gamma(1)$$

$$\Gamma(\tfrac{n+1}{2})=\Gamma(\tfrac{2m+1}{2})=\underbrace{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-n+1}{2}}_{m}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$\Gamma(\tfrac{n}{2})\Gamma(\tfrac{n+1}{2})=\frac{(n-1)!}{2^{m-1}2^m}\cdot\Gamma(1)\Gamma(\tfrac{1}{2})=2^{1-2m}(n-1)!\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}$$

$$=2^{1-n}(n-1)!\sqrt{\pi}$$

(ii) $n=2m-1$ のとき, ほぼ同様に,

$$\Gamma(\tfrac{n}{2})=\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{n-2m+2}{2}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$\Gamma(\tfrac{n+1}{2})=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{n-2m+3}{2}\cdot\Gamma(1)$$

$$\Gamma(\tfrac{n}{2})\Gamma(\tfrac{n+1}{2})=\frac{(n-1)!}{2^{2m-1}}\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(1)=2^{1-n}\cdot(n-1)!\sqrt{\pi}$$

4-9. (4-31)

$$B(p+1,q+1)=\int_0^1 x^p(1-x)^q dx=\int_1^0(1-t)^p t^q(-dt)$$

$1-x=t$ とおくと. $dx=-dt$

$$=\int_0^1 t^q(1-t)^p dt=B(q+1,p+1)$$

(4-32)　$x=\sin^2\theta$ とおくと,　$dx=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$　　$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$$B(p+1,q+1)=\int_0^1 x^p\cdot(1-x)^q dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}\theta\cdot\cos^{2q}\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p+1}\theta\cdot\cos^{2q+1}\theta\cdot d\theta$$

(4-33).

$$\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)=\int_0^\infty x_1^p e^{-x_1}dx_1\cdot\int_0^\infty x_2^q e^{-x_2}dx_2$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty x_1^p x_2^q e^{-x_1-x_2}dx_2\,dx_1\quad (*)$$

$\begin{cases}x_1=r^2\sin^2\theta\\ x_2=r^2\cos^2\theta\end{cases}$ と変換すると. $\left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\theta)}\right|=\left\|\begin{matrix}2r\sin^2\theta & 2r^2\sin\theta\cos\theta\\ 2r\cos^2\theta & -2r^2\cos\theta\sin\theta\end{matrix}\right\|$

$$=4r^3\left|\sin^3\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^3\theta\right|$$

$$=4r^3\sin\theta\cos\theta\quad (0<\theta<\tfrac{\pi}{2})$$

$$(*)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty(r^2\sin^2\theta)^p(r^2\cos^2\theta)^q e^{-r^2}\cdot 4r^3\sin\theta\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty\sin^{2p+1}\theta\cdot\cos^{2q+1}\theta\cdot r^{2p+2q+3}e^{-r^2}dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p+1}\theta\cos^{2q+1}\theta\underline{\int_0^\infty r^{2(p+q)}e^{-r^2}\cdot 2r\,dr}\,d\theta$$

$r^2=y$ とおく.

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p+1}\theta\cos^{2q+1}\theta\cdot\Gamma(p+q+1)\cdot d\theta$$

$$\therefore\ \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p+1}\theta\cos^{2q+1}\theta\,d\theta=B(p+1,q+1)\quad (\because(4\text{-}32))$$

4-10 ① $N(0,1)$: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2itx)}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2-\frac{1}{2}t^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}dx$$

$x-it=u$ とおくと. $dx=du$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\cdot\sqrt{2\pi}\qquad(\because (4\text{-}24)(4\text{-}27))$$

$$=e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$N(0,\sigma)$: $\varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}dx$

$$=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-i\sigma^2t)^2/\sigma^2}dx=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

$x-i\sigma^2t=u$ とおく。

$N(m,\sigma)$: $\varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx-\frac{1}{2}(x-m)^2/\sigma^2}dx$

$$=e^{itm-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-m-i\sigma^2t)^2/\sigma^2}dx}_{=1}=e^{itm-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

$$\left(\begin{aligned}\because\ & itx-\tfrac{1}{2}(x-m)^2/\sigma^2=-\tfrac{1}{2\sigma^2}\{(x-m)^2-2itx\sigma^2\}\\ &=-\tfrac{1}{2\sigma^2}\{(x-m-i\sigma^2t)^2-2im\sigma^2t-i^2\sigma^4t^2\}\\ &=-\tfrac{1}{2\sigma^2}(x-m-i\sigma^2t)^2+imt-\tfrac{1}{2}\sigma^2t^2\end{aligned}\right)$$

③ (i) $\varphi(t)=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{itx}\frac{1}{\Gamma(\mu)}x^{\mu-1}e^{-x}dx=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}x^{\mu-1}e^{-x(1-it)}dx$ (*)

$x(1-it)=y$ とおくと. $x=(1-it)^{-1}y$, $dx=(1-it)^{-1}dy$

$$(*)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}(1-it)^{1-\mu}y^{\mu-1}e^{-y}\cdot(1-it)^{-1}dy=\frac{(1-it)^{-\mu}}{\Gamma(\mu)}\cdot\Gamma(\mu)$$

$$=(1-it)^{-\mu}$$

(ii) 同様に, $\varphi(t)=\left(1-i\dfrac{t}{\alpha}\right)^{-\mu}$

4-11 ① $\varphi_{X_1+X_2}(t)=\varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t)\qquad(\because (4\text{-}18))$

$$=(pe^{it}+q)^{n_1}(pe^{it}+q)^{n_2}\qquad(\because (\text{練習}4\text{-}5①))$$

$$=(pe^{it}+q)^{n_1+n_2}$$

$\therefore X_1+X_2$: $b(n_1+n_2,p)$

② 数学的帰納法により. $\sum_{i=1}^{n}X_i$: $b(n_1+\cdots+n_n;p)$

4-12 $\varphi_{\Sigma X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(t)=e^{-(m_1+\cdots+m_n)(1-e^{it})}\qquad(\because \text{練習}4\text{-}5②)$

$\therefore \Sigma X_i$: $P_o(m_1+\cdots+m_n)$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\frac{(m_1+\cdots+m_n)^{x_1+\cdots+x_n}\cdot e^{-(m_1+\cdots+m_n)}}{(x_1+\cdots+x_n)!}$$

4-13 $\varphi_{\Sigma X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(t)=e^{it(m_1+\cdots+m_n)-\frac{1}{2}(n\sigma^2t^2)}\qquad(\because \text{練習}4\text{-}10①)$

$$=e^{it(m_1+\cdots+m_n)-\frac{1}{2}(\sqrt{n}\sigma)^2t^2}$$

ΣX_i : $N(m_1+\cdots+m_n,\ \sqrt{n}\sigma)$

4-14 X: $N(0,1)$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\Rightarrow Y=X^2\quad g(y)$

$$G(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y})$$

$$g(y)=G'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y}))=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}y}$$

$$g(y)\begin{cases}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}y} & (y>0)\\ =0 & (y\leq 0)\end{cases}$$

$$\varphi_Y(t)=\int_0^{\infty}e^{ity}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}y}dy=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}(1-2it)y}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(1-2it)y}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1-2it}{2}\right)^{-(-\frac{1}{2}+1)}\cdot\Gamma(-\tfrac{1}{2}+1)\qquad(\because (4\text{-}22))$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1-2it}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$=(1-2it)^{-\frac{1}{2}}$$

4-15. $\varphi_{\chi^2_n}(t)=\varphi_{X_1^2+\cdots+X_n^2}(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i^2}(t)=\prod^{n}(1-2it)^{-\frac{1}{2}}$

$$=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$$

4-16 (4-36) gamma分布の特性関数 $\varphi(t)=\left(1-i\dfrac{t}{\alpha}\right)^{-\mu}\quad(\because \text{練習}4\text{-}10②)$

$\varphi_{\chi^2_n}(t)$ とは, これに $\alpha=\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{n}{2}$ を代入したものにほかならない。よって.

$$f(x)\begin{cases}=\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & (x\geq 0) \quad (\because (4\text{-}29)(\text{ii}))\\ =0 & (x<0)\end{cases}$$

(4-37) 明らか。 $(\because (4\text{-}36))$

(4-38) $E(\chi_n^2)=\displaystyle\int_0^\infty x f(x)dx$

$$=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-(\frac{n}{2}+1)}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$(\because (4\text{-}22))$

$$=\frac{2}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=n$$

(別解) $\varphi'_{\chi_n^2}(t)=-\frac{n}{2}(1-2it)^{-\frac{n}{2}-1}(-2i)=in(1-2it)^{-\frac{n}{2}-1}$

$\varphi'_{\chi_n^2}(0)=in=im^1 \quad (\because (4\text{-}10))$

$\therefore m'=E(\chi_n^2)=n$

(4-39) $Var(\chi_n^2)=\displaystyle\int_0^\infty(x-n)^2f(x)dx \quad (\because (4\text{-}38))$

$$=\underbrace{\int_0^\infty x^2f(x)dx}_{\downarrow ※}-2n\int_0^\infty xf(x)dx+n^2\int_0^\infty f(x)dx$$

$$=n(n+2)-2n\cdot n+n^2\cdot 1=2n$$

※ $\varphi''_{\chi_n^2}(t)=in\left(-\frac{n}{2}-1\right)(1-2it)^{-\frac{n}{2}-2}(-2i)=2n\left(-\frac{n}{2}-1\right)(1-2it)^{-\frac{n}{2}-2}$

$\varphi''_{\chi_n^2}(0)=-n(n+2)=i^2m^2 \quad (\because (4\text{-}10))$

$\therefore m^2=\displaystyle\int_0^\infty x^2f(x)dx=n(n+2)$

(4-40) $\varphi_{\chi_{n_1}^2}(t)=(1-2it)^{-\frac{n_1}{2}}, \quad \varphi_{\chi_{n_2}^2}(t)=(1-2it)^{-\frac{n_2}{2}}$

$\varphi_{\chi_{n_1}^2}(t)\cdot\varphi_{\chi_{n_2}^2}(t)=(1-2it)^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)}$

$=\varphi_{\chi_{n_1+n_2}^2}(t)$

$\therefore \chi_{n_1}^2+\chi_{n_2}^2=\chi_{n_1+n_2}^2$

(4-41) (4-40)から、数学的帰納法により、導かれる。

4-17. $X_i: N(0,\sigma)$ $\quad \chi_n^2=X_1^2+\cdots+X_n^2$

まず、$Y=X^2$とおく。 練習4-14と同様にして、

$Y=X^2$のp.d.fは
$$g(y)\begin{cases}=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sigma^2}} & (y\geq 0)\\ =0 & (y<0)\end{cases}$$

$$\varphi_Y(t)=\int_0^\infty e^{itx}g(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x(1-2it\sigma^2)/\sigma^2}dx$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1-2i\sigma^2t}{2\sigma^2}\right)^{-(-\frac{1}{2}+1)}\cdot\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right) \quad (\because (4\text{-}22))$$

$$=(1-2i\sigma^2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$\therefore \varphi_{\chi_n^2}(t)=(1-2i\sigma^2t)^{-\frac{n}{2}}$ これは、練習4-10③に、$\alpha=\frac{1}{2\sigma^2}$, $\mu=\frac{n}{2}$

を代入したものに他ならない。よって χ_n^2のp.d.f.は

$$f(x)\begin{cases}=\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & (x\geq 0) \quad (※)\\ =0 & (x<0) \quad (\because (4\text{-}29)(\text{ii}))\end{cases}$$

4-18 ① $\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2=U$. $\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}=\dfrac{U}{n}=V$ とおく。

Uのp.d.f.
$$f(u)\begin{cases}=\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & (x\geq 0) \quad (\because 練習4\text{-}17)\\ =0 & (x<0)\end{cases}$$

$$G(v)=P(V\leq v)=P\left(\frac{U}{n}\leq v\right)=P(U\leq nv)=F(nv)$$

$\therefore$
$$g(v)=F'(nv)=nf(nv)$$

$$=n\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}(nv)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nv}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}v^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nv}{2\sigma^2}} \quad (v\geq 0)$$

② 同じく $\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2}=\sqrt{U}=V$ とおく。

$$G(v)=P(V\leq v)=P(\sqrt{U}\leq v)=P(U\leq v^2)=F(v^2)$$

$\therefore$
$$g(v)=G'(v)=2vf(v^2)$$

$$=\frac{2v}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}(v^2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{2}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}v^{n-1}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \quad (v\geq 0)$$

③ 同じく，$\sqrt{\dfrac{\Sigma X_i^2}{n}}=\sqrt{\dfrac{U}{n}}=V$ とおく。

$$G(v)=P(V\leq v)=P(U\leq nv^2)=F(nv^2)$$

$$g(v)=G'(v)=2nv\,f(nv^2)$$

$$=2nv\,\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}(nv^2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nv^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{2(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}v^{n-1}e^{-\frac{nv^2}{2\sigma^2}}\qquad(v\geq 0)\qquad(※)$$

4-19　(4-42)　$t=\dfrac{X_{n+1}}{\sqrt{\dfrac{\Sigma X_i^2}{n}}}=\dfrac{U}{V}$ とおく。　　$f(t)$: T の p.d.f.

U: $f(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$　　V: $g(v)=$ ※　（練習 4-18③）

$$\begin{matrix}U\\V\end{matrix}\Longrightarrow\begin{matrix}T=\frac{U}{V}\\S=V\end{matrix}\quad 即\quad\begin{matrix}U=TS\\V=S\end{matrix}\ と変換。\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)}\right|=\left\|\begin{matrix}s&t\\0&1\end{matrix}\right\|=s$$

T, S の結合密度を $f(t,s)$ とすれば，$A(t)=f_t(t)$ として求められる。

$$f(t,s)\,ds\,dt=f(u,v)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)}\right|ds\,dt$$

$$=f(u)\cdot g(v)\ s\,ds\,dt\qquad(\because U,V\text{ は独立})$$

$$=f(ts)g(s)\ s\,ds\,dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2s^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{2(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}s^{n-1}e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}}\cdot s\,ds\,dt$$

$$=\frac{2(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma^{n+1}\Gamma(\frac{n}{2})}s^n e^{-\frac{(t^2+n)s^2}{2\sigma^2}}ds\,dt$$

$$f_t(t)=\int_0^\infty\frac{2(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma^{n+1}\Gamma(\frac{n}{2})}s^n e^{-\frac{(t^2+n)s^2}{2\sigma^2}}ds$$

$$=\frac{2(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma^{n+1}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty s^n e^{-\frac{(t^2+n)}{2\sigma^2}s^2}ds$$

$$=\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma^{n+1}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty w^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{(t^2+n)}{2\sigma^2}w}dw\qquad\begin{matrix}s^2=w\\2s\,ds=dw\\ds=\frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}}dw\end{matrix}$$

$$=\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma^{n+1}\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\left(\frac{t^2+n}{2\sigma^2}\right)^{-(\frac{n-1}{2}+1)}\Gamma(\frac{n-1}{2}+1)\qquad(\because(4\text{-}22))$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}n^{\frac{n}{2}}(t^2+n)^{-\frac{n+1}{2}}=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

4-20　p.d.f. (4-42) をもつ分布の，奇数次のモーメントは全てゼロ（∵奇関数）。

偶数次，すなわち $\nu=2r$ 次のときのみ考える。$t=\dfrac{X_{n+1}}{\sqrt{\dfrac{\Sigma X_i^2}{n}}}=\dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{n}}}$ とおくと．

$$m^\nu=m^{2r}=E(t^{2r})=E\left(\frac{u^{2r}}{\frac{v^r}{n^r}}\right)=n^rE(u^{2r})E(v^{-r})\ (＊)\ (\because U,V\text{ は独立})$$

しかるに u^2，v は χ^2 分布に従うから，χ_n^2 の r 次モーメント $m_{\chi_n^2}{}^r$ を求めてみると，

$$m_{\chi_n^2}{}^r=\int_0^\infty x^r\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}dx\qquad(\because\text{問題 4-17 の解答 (p.40)})$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}+r-1}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}dx$$

$$\stackrel{\because(4\text{-}22)}{=}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{-(\frac{n}{2}+r)}\cdot\Gamma(\frac{n}{2}+r)=\frac{(2\sigma^2)^r\,\Gamma(\frac{n}{2}+r)}{\Gamma(\frac{n}{2})}\quad(※)$$

$$\therefore(＊)=n^r\cdot m_{u^2}^r\cdot m_v^{-r}=n^r\cdot\frac{(2\sigma^2)^r\cdot\Gamma(\frac{1}{2}+r)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot\frac{(2\sigma^2)^{-r}\,\Gamma(\frac{n}{2}-r)}{\Gamma(\frac{n}{2})}=\frac{n^r\cdot\Gamma(\frac{1}{2}+r)\Gamma(\frac{n}{2}-r)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\ 注)$$

注) この r 次モーメントは，$\frac{1}{2}+r>0$ かつ $\frac{n}{2}+r>0$，即 $-1<2r<k$ のとき，存在する。

$$m^2=\frac{n^1\,\Gamma(\frac{1}{2}+1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}=\frac{n\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{1}{2})(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}=\frac{n}{n-2}\qquad(\because(4\text{-}25))$$

従って 平均 0，分散 $\dfrac{n}{n-2}$ である。

4-21　(4-45)　$X=\dfrac{\sum^m X_i^2}{\sum^n Y_i^2}=\dfrac{U}{V}$，　即　$\begin{matrix}u=xy\\v=y\end{matrix}$　なる変換を考える。$\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\left\|\begin{matrix}y&x\\0&1\end{matrix}\right\|=y$

$Y\qquad=V$，

U, V の密度は $f(u)$，$f(v)$ で，いずれも練習 4-17 の解答 (※) で与えられる。また，その結合密度を $f(u,v)$；x, y の結合密度を $f(x,y)$ とすると，求める X の密度 $f_{m,n}(x)$ は，周辺密度 $f_x(x,y)$ で与えられる。

$$f(x,y)\,dx\,dy=f(u,v)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|dx\,dy$$

$$=f(u)f(v)\cdot y\,dx\,dy\qquad(\because U,V\text{ は独立})$$

$$=f(xy)f(y)\,y\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\alpha^{m+n}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(xy)^{\frac{m}{2}-1}\cdot y^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{xy+y}{2\alpha^2}}\cdot y\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\alpha^{m+n}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{m}{2}-1}y^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{x+1}{2\alpha^2}y}\,dx\,dy$$

$$\therefore\ f_{m,n}(x) = \int_0^\infty f(x,y)\,dy = \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\alpha^{m+n}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty y^{\frac{m+n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x+1}{2\alpha^2}y}\,dy$$

$$= \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\alpha^{m+n}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{x+1}{2\alpha^2}\right)^{-\frac{m+n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \qquad (\because (4\text{-}22))$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{m+n}{2}}} \qquad (x>0)$$

4-22 (4-46) $z=f_{m,n}=\frac{n}{m}X$ 即 $x=\frac{m}{n}z$ $\left|\frac{dx}{dz}\right|=\frac{m}{n}$ なる変換を上に施し、

$$f_{m,n}(z) = f_{m,n}(x)\left|\frac{dx}{dz}\right|$$

$$= f_{m,n}\left(\frac{m}{n}z\right)\cdot\frac{m}{n}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\frac{(\frac{m}{n}z)^{\frac{m}{2}-1}}{(1+\frac{m}{n}z)^{\frac{m+n}{2}}}\cdot\frac{m}{n}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{(1+\frac{m}{n}z)^{\frac{m+n}{2}}} \qquad (z>0)$$

4-23 $f_{m,n}(z)$ の ν 次のモーメントを μ^ν とかくと、

$$\mu^\nu = E(z^\nu) = E\left(\left(\frac{n}{m}x\right)^\nu\right) = \left(\frac{n}{m}\right)^\nu E\left(\frac{u^\nu}{v^\nu}\right) \qquad (\because \text{練習}4\text{-}21, 4\text{-}22\text{の}Df.)$$

$$= \left(\frac{n}{m}\right)^\nu E(u^\nu)\cdot E(v^{-\nu}) \qquad (\because u, v\text{ は独立})$$

$$= \left(\frac{n}{m}\right)^\nu\frac{(2\alpha^2)^\nu\Gamma(\frac{m}{2}+\nu)}{\Gamma(\frac{m}{2})}\cdot\frac{(2\alpha^2)^{-\nu}\Gamma(\frac{n}{2}-\nu)}{\Gamma(\frac{n}{2})} \qquad (\because \text{練習 }4\text{-}20\ (※)\ m_{\chi^2}^{\nu}\text{ の計算式})$$

$$= \left(\frac{n}{m}\right)^\nu\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+\nu)}{\Gamma(\frac{m}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-\nu)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

(このモーメントは、$\frac{1}{2}m+\nu>0$, $\frac{n}{2}-\nu>0$, すなわち $-m<2\nu<n$ のときに存在。)

$$\mu^1 = \frac{n}{m}\cdot\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\frac{m}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{n}{m}\cdot\frac{\frac{m}{2}}{\frac{n}{2}-1} = \frac{n}{n-2} \qquad (\text{平均})$$

$$\mu^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+2)}{\Gamma(\frac{m}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-2)}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \left(\frac{n}{m}\right)^2\frac{(\frac{m}{2}+1)\cdot\frac{m}{2}}{(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)} = \frac{n^2(m+2)}{m(n-2)(n-4)}$$

$$\alpha_z^2 = \mu^2-(\mu^1)^2 \qquad (\because (2\text{-}30)\ (i))$$

$$= \frac{n^2(m+2)}{m(n-2)(n-4)} - \frac{n^2}{(n-2)^2}$$

$$= \frac{n^2(m+2)(n-2)-n^2m\cdot(n-4)}{m(n-2)^2(n-4)} = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \qquad (\text{分散})$$

4-24 (4-48) $\frac{z-n\mu}{\sqrt{n}\alpha}$ の特性関数を、$\varphi_n(t)$とする。

$$\varphi_n(t) = E\left(e^{it(z-n\mu)/\sqrt{n}\alpha}\right)$$

$$= E\left(\exp\left(it\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)/\sqrt{n}\alpha\right)\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{n}E\left(\exp\left(it(x_j-\mu)/\sqrt{n}\alpha\right)\right) \qquad (\because (4\text{-}19))$$

$$= (\varphi(t))^n \qquad (\varphi(t)\text{は }(x-\mu)/\sqrt{n}\alpha\text{ の特性関数})$$

しかるに $\varphi(t) = 1+iE\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{n}\alpha}\right)t - \frac{1}{2}E\left(\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{n}\alpha}\right)^2\right)t^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$ (∵(4-11))

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = \left[\lim_{n\to\infty}\varphi(t)\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left[1-\frac{t^2}{2n}\right]^{\frac{2n}{-t^2}}\right)^{\frac{-t^2}{2}}$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}}$$

これは N(0,1)の特性関数に他ならない(練習 4-10 ①)。$n\to\infty$のとき、$(z-n\mu)/\sqrt{n}\alpha$ の c.d.f. は、N(0,1)の c.d.f. に収束する。(Wilks[1962=1971: 252])

(4-48)の結果は、中心極限定理の特殊な場合である。

4-25 (4-49) まず、次の命題(※)が成立することをみる。

(※) $(x_1,\cdots,x_n)$が2項分布 $Bi(m,p)$ からの標本であるとき、和 $Z=\Sigma x_i$ の標本分布も 2項分布 $Bi(mn,p)$ になる。

(証) $Bi(m,p)$の特性関数 $\varphi(t)=(q+e^{it}p)^m$ (∵ 練習4-5①)

∴ Z の特性関数 $\varphi_Z(t)=(q+e^{it}p)^{mn}$ (∵練習4-11②)

(※)で $m=1$とおくと、Z は、$Bi(n,p)$となる。この2項分布の平均、分散はそれぞれ np, npq であるから、(4-48)を適用すれば、(4-49)が成立する。

CN 112 HASHIZUME, Daisaburo
¥110
1981-6-3