

数学における〈規範〉の所在

橋 爪 大三郎

数学は一連の規則に支配された精神活動である。これら規則は抽象的な、数学の秩序をかたちづくる。数学の秩序は個々の思惟に外在する1個の社会的事実であり、近代にいたって特殊な歴史的展開をみせている社会現象である。ところで数学はなにゆえ個々の思惟を拘束するほどの普遍性をもつのか？ この拘束の由来をどう捉えるかによって、数学の本性もまた異なってみえてくる。本稿では、形式主義の試みとそれに関わるK. Gödel (1906-1978) の不完全性定理を具体的な材料として、数学という社会現象の中心に〈規範〉をさぐりあてべきことをのべよう。これは、数学の社会(科学的)基礎を究明する今後の作業に、予想的な概観を与えるものである。

数学化の時代としての近代

【1】 数学は、とりわけ創造的な営みとしての数学は、純粋で透徹した精神の、熱狂的な一時代のある運動傾向を代表する。

数学は一見して、なにか客観的な形式体系であって、いろいろの記号で書きとめられ、ちゃんとそこに存在するもののように思われやすい。しかしこれはみかけにすぎぬ。じっさい、正しく書きとめられた数学とは必ず証明——前提となる公理、個々の証明を構成する推論の連鎖、その終端なる定理——である。前提はわずかでも、推論の無数の連鎖が、それゆえ無数の定理がそこからうまれうる。数学は本来、終わりをしらない運動であって、どこまでも自らを拡張させてゆく。

【2】 数学は、近代のもっとも本質的な部分をかたちづくる。

近代の数学はまず、Descartes の解析学——高貴な幾何と卑しい算術との融合——として出発する。この土台のうえにNewton が彼の仕事を組み立てた。天上 (Kepler) と地上 (Galilei) の統一法則、数学を導きの鍵とする物質的世界観の構築である。こうして始まった数学化の運

動は、近代の周辺的な現象ではない。それは、理工系の諸科学はいうにおよばず、哲学や宗教、法、社会諸科学、さらには絵画や音楽をも含む、知の全体的で支配的な潮流をかたちづくる。

近代は、自然ならびに社会に対する徹底した対象意識——科学的態度——に貫かれている。この科学に形式を与え科学を可能にしているのが数学である。ところで、科学の普遍性は経験的な妥当性にもとづく。それでは数学の普遍性はどこに由来するのか？ Kant は数学の真理性を、ひとまず先験的悟性範疇論によって弁証したと考えた。しかし後にEuclidの(したがってNewtonの)体系が相対化されるに伴い、数学の本性への問いが改めて提出される。これはRussell, Husserl, Wittgensteinらを苦悩させたが、解決は今日のわれわれに持ちこされている。

【3】 経験数学と純粋数学とがまったく異なるのは言うまでもない。経験数学は特定の目的に有用なことに自足するばかりで、論理整合的な一貫した体系になりあがろうとまではしない。純粋数学はといえば、数学の理念に目覚めており、自分が数学たることの根拠を自分で手にす

ると信じている。

古代の純粋数学であるEuclidの体系は、素朴にもその前提たる諸公理を無二の真理とみなすことができた。ところが現代の数学において公理は恣意的なものであり、もはや真理とはみとめられない。数学は実在世界との対応を断たれた。いまや数学は自分の活動それ自体において、すなわち証明を不断に遂行しているという事実において、数学としての自己同一性をみつけようとする以外にない。

【4】 Hilbertらの形式主義(Formalismus)は、今世紀初頭における最も正統的な数学の自己定位の試みである。

形式主義は数学を一切の経験的な意味づけや解釈から切りはなし、純粋にそれ自身として考察する。数学はただ完璧な形式的体系であることを条件に存在を許されることになる。Hilbertはここで、無矛盾(widerspruchsfrei)という概念を重視した。一組の公理は、決して矛盾を帰結しないとき、無矛盾と言われる。数学は意味を欠いてもかまわないが、無矛盾な体系でなければならぬ。それではじめて数学の解釈も有用性も生じてこよう。——こうして形式主義は、数学(とくにその根本をなす集合論)の無矛盾性の確証を、最大の目標として掲げた。

【5】 近代の数学は、普遍的だと自称する。しかしここにトリックがありうる。いくつか疑問を掲げよう。まず第1に、これまでこんな数学をした社会は多くない。むしろ例外とみえる。ではそうした文化的相対性をはねのけるどんな特権的要因が、近代の数学に具わっているのか？

第2に数学は、経験からも実在世界からも切りはなされることによって、純然たる“思惟の秩序”をあらわすはずのものとなった。それではいったい、なぜ世界は思惟に屈従する(よう

にみえる)のか？ 世界は思惟に外在するはずなのに、こうした世界と数学との同調はどこからやってくるのか？

近代数学の普遍性を考える場合、一方の極には、それを人々が従うゆえに各人も従うところに成立つ秩序とみなす立場、端的に権力的な数学観が位置する。他の極には、思惟の実質的な普遍性の表現とみる立場がある。^{*2} 数学という社会現象は、この両極のあいだのどこかにひろがっている。

形式主義は、成功すれば、かなり見通しよい数学観によってこうした問題に立ちむかうはずだった。ところがこの試みは、まもなくGödelの仕事によって、決定的打撃を被る。事態はまた混沌の闇に突きかえされてしまう。

Gödel [1931] における証明論の構成

【6】 Gödelの「不完全性定理」が衝撃をもって迎えられたのは、それによって〈形式的体系の無矛盾性の証明に際して、Hilbertのプログラムは、その最初の形のままでは原理的に実現不可能であることが、曝露され〉(Ruзавин [1968=1977: 343]) たからである。

Gödelの結論はふつう、〈或る公理系が無矛盾である場合には、その公理系の無矛盾性は、その公理系のもとで証明することはできない〉(前原 [1981: 46]) としてしられる。これは、「第2不完全性定理」とよばれるもので、それに劣らず重要な「第1不完全性定理」——〈どんな公理系を設定しても、その公理系が矛盾を含まないとか、その他、いくつかの条件を満たしている限り、本来は真か偽かのいずれかに定まっているべき論理式Aで、しかも、A自身とAの否定がともに証明できないような、そういう論理式Aが必ず存在する。〉(前原 [1981: 45]) ——に先行されている。定理は厳密な論

理式で記されているから、いま引用した表現では正確さを欠くのだが、先へすすもう。

【7】 “無矛盾性の証明”とは、証明論という超数学的作業の一環である。

命題Aとその否定がともに、採用された前提K(論理式の集合)から指定された手続きによって導出されてしまう場合、すなわち、

$$(7.1) \quad K \vdash A \quad \text{かつ} \quad K \vdash \neg A$$

となるときKを、矛盾というのであった。このいみで矛盾は、証明という名の活動があって生じるものである。数学とは第一義的には、この証明という活動のことだった。だから数学は、矛盾がうまれるかどうかに関知できない。そこで、数学の外にたち、あれこれの数学(公理系)が証明を通じて矛盾をうみだすかどうかを監視(=ふたたび証明)せんとする試みが求められる。この“自己言及的”な試みが、Hilbertの構想した証明論なのである。^{*3,*4}

【8】 Gödel [1931]は、証明論の対象(たる証明)と証明論(それ自身の遂行する証明)との、微妙な区別と同一視のうえに成立している。ここで中心的役割をはたすのが“(数値別な)表現可能”性のアイデアである。この工夫により、問題となっている証明(不)可能性をめぐる議論をそのまま、自然数の集合のなかに移しかえることができる。

詳しくみていこう。Gödelは、具体的な数学的对象として、PM流の公理系を採る。^{*5}すなわち、採用された公理とは、I. Peanoによる自然数の公理(数学的帰納法の原理を含む)、II. 命題論理の公理、III. 述語論理の公理、IV. 内包の公理、V. 外延性の公理、である。さらに推論規則として

$$(8.1) \quad \frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \quad \frac{A}{\forall x A}$$

の2つを採用する(前原[1977:11f])。

つぎにGödelは、形式化された証明のひとつひとつに、ゲーデル数という自然数を対応させる。

公理もしくは証明できる他の論理式からの直接の結論を、証明できる論理式という。こうしてできる論理式の列 A_1, A_2, \dots, A_n が、 A_n の証明(Beweis)である。ここで、論理式をつくる各記号(0, ', …)には1, 3, …… / ℓ 階の変数には $17^\ell, 19^\ell, 23^\ell, \dots$ ($\ell=1, \dots$) / 記号の有限列 $A_i = X_1 X_2 \dots X_n$ には $n_i = \lceil A_i \rceil = 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \dots \cdot p_\mu^{m_\mu}$ (各記号 X_μ のゲーデル数は m_μ , 第 μ 番目の素数を p_μ とあらわす) / 記号の有限列の有限列 A_1, A_2, \dots, A_n には $n = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \dots \cdot p_\nu^{n_\nu}$ / をそれぞれ対応させる。この対応規則によれば、そのゲーデル数からもとの論理式や証明が一意に確定する(素因数分解の一意性より)。

さらにGödelは、証明論で有用な一連の関係を、(原始)帰納的関数(rekursive Function)のかたちで定義できることを示す。^{*6}そうした関係は、 $x|y$ (x は y で割りきれれる), $\text{Prim}(x)$ (x は素数), ……をはじめとして46あげられているが、重要なのはその最後の、

$$(8.2) \quad \text{Bew}(x) \equiv (\exists m)(m B x)$$

なる x についての1項関係である。^{*7}

【9】 論理式の集合Kに属する論理式のゲーデル数全体の集合を κ とおく。 $x \in \kappa$ が(数値別に)表現可能であることを、Kは表現可能であるという。Kが論理式の有限集合か空集合であるとき、Kは表現可能である。

Kが表現可能なら関係 $x B_K y$ は表現可能、という定理がある(証明略)。そこでこの関係を(数値別に)表現する2変数 x, y の論理式が存在する。これを $x B_K y$ とすると、任意の自

然数 m, n に対して、

$$(9.1) \quad m B_K n \Rightarrow \vdash m B_K n,$$

$$(9.2) \quad \overline{m B_K n} \Rightarrow \vdash \neg(m B_K n)$$

である。^{*8}さらに、 $\exists y(y B_K x)$ を $\text{Bew}_K(x)$ とかけば、Kが表現可能のとき、

$$(9.3) \quad K \vdash A \Rightarrow \vdash \text{Bew}_K(\ulcorner A \urcorner)$$

である(証明略)。ただし $\ulcorner A \urcorner$ は、ゲーデル数 $\lceil A \rceil$ に対応する対象式をさす。Kが空であれば、

$$(9.4) \quad \vdash A \Rightarrow \vdash \text{Bew}(\ulcorner A \urcorner)$$

となる。

ここまでの手順で、証明論の道具だての全体が自然数の集合(を含む数学的对象)のなかに“埋めこまれ”たかたちになった。

【10】 ついでです、“実際に真か偽のいずれかであるのにどちらも証明できない命題” U_K の存在が、証明される。^{*9}

次式をみだす論理式 $F(x)$ が存在するとき、論理式の集合Kは ω -矛盾するという:

$$(10.1) \quad (\forall n)[K \vdash F(n)] \\ \text{かつ} \quad K \vdash \neg \forall x F(x)$$

Kが ω -矛盾しないなら、Kは ω -無矛盾(ω -widerspruchsfrei)だという。ここで、Kが表現可能かつ ω -無矛盾ならば

$$(10.2) \quad K \vdash \text{Bew}_K(\ulcorner A \urcorner) \Rightarrow K \vdash A$$

である、という定理が成立する(前原[1977:129f])。つづけて、任意の1変数 x の論理式 $F(x)$ に対し、自由変数を含まぬ論理式Aで

$$(10.3) \quad A \Leftrightarrow F(\ulcorner A \urcorner)$$

が証明できるものが存在する、と言える(Gö-

delの対角化定理)。 $F(x)$ として $\neg \text{Bew}_K(x)$ を採り、Aを U_K と書くことにするならば、

$$(10.4) \quad U_K \Leftrightarrow \neg \text{Bew}_K(\ulcorner U_K \urcorner)$$

が証明できることになる。しかるに $K \vdash U_K$ とすると、(9.3)などから $K \vdash \neg U_K$ となり矛盾。ゆえに、Kが無矛盾なら U_K はKから証明できない。さらにKが ω -無矛盾なら、同様に $\neg U_K$ もKから証明できない。すなわち U_K は決定不能(unentscheidbar)である(第1不完全性定理)。

【11】 つぎに“公理系Kは無矛盾である”という言明を意味する論理式を、次式によって定義する:

$$(11.1) \quad \text{Consis}(K) \\ \Leftrightarrow \neg \exists x [\text{Bew}_K(x) \wedge \text{Bew}_K(\text{Neg}(x))]$$

(ただし、 $\text{Neg}(x)$ とは、 $\text{Neg}(\ulcorner A \urcorner) = \ulcorner \neg A \urcorner$ なる関数 $\text{Neg}(x)$ を表現する1変数 x の対象式である。)すると、公式

$$(11.2) \quad \text{Consis}(K) \rightarrow \neg \text{Bew}_K(\ulcorner U_K \urcorner)$$

が成立する(前原[1977:157f])。ただし、 U_K は、前節であげたものと同じ。ここからだちに、つぎの第2不完全性定理が帰結する: \ll 論理式の集合Kが強い意味で表現可能で、かつ無矛盾ならば、論理式 $\text{Consis}(K)$ はKからは証明できない。 \gg (前原[1977:155])。^{*10}

数学と<規範>

【12】 数学をその内容の正しきで根拠づけようとする素朴な理解が過去のものとなってすでに久しい。Russellらの論理主義はこれにかえ、証明可能なこと即、その命題が内容的に真と考えた(数学的内容の論理への還元)。しか

しGödelの定理の示すように、無矛盾な形式的体系なら必ず決定不能(unentscheidbar)な命題を含まざるをえない。それ以外の理由もあって、数学的内容をことごとく論理へ還元するのは不可能である。

これに対して形式主義は、あえて数学的内容から絶縁したところに、数学の根拠を求めんとした。形式的体系の無矛盾性にてある。ところがGödelは、どのような形式的体系も自分が無矛盾なことを決して確言できないことを示してしまった。この論証は形式主義のプランにのって、論理式の内容を捨象する形式的観点から遂行されている。Gödelの定理は、数学を根拠づける試みを無に帰するものか?^{*11}

【13】 不完全性定理には多様な解釈がありうる。よくある議論はそれを、自らに言及しようとする形式的体系一般の問題と考えるものである。^{*12} たしかにGödelの証明は自己言及的だが、それがどう不完全性定理と結びついているかは慎重に見極めた方がよい。

Hilbert-Gödelの証明論を導いた動機は、なんとかしてある形式的体系に自身の手で自身の完全性を確認させたい、ということだった。形式的体系のとりうる確実な手段は“証明”しかない。そこでどうしても証明によって証明に言及するという構図が生じてくる。ただその一方で、この自己言及的な関係が(数学的な)無限の観念によって支えられていることも見逃すべきでなからう。

【14】 証明論——すべての証明に言及する証明——が可能であるためには、Gödelの証明にあるような特別のステップ、すなわち、すべての証明を自然数の集合(可算無限集合)のなかに埋めこむ手順が必要であった。証明とはそもそも、記号の有限列の有限列として表記できる有限の手続きであった。だからその全体が可

算無限集合のなかに(数値別の)表現を見出すことができたのである。このいみで証明論は、可算無限集合の存在に全幅の信頼を寄せている。

しかし(可算)無限集合は、どんないみで“存在”するのか? それが“実在”するのではないことは言うまでもない。実在世界と対応(解釈)がつくことを根拠にもできない。^{*13} このいみで(可算)無限とは、1個のフィクションである。このフィクションはCantorの創立以来わずか100年あまりしか経過していない。

【15】 数学的な無限が、それに対応する実在も精神活動もともなわないフィクションであるなら、それは一種の社会形象であろう。だから(具体的な)無限は、制度もしくは社会規範の資格で、はじめて存在できる。^{*14}

それでは、こうしたフィクションの仮設は不当なのか?

数学から無限にまつわる一切のフィクションを排除しようとして、厳密有限主義のような極端な試みも生じてくる。後期のWittgensteinは、数学を含む人間の社会活動の一切を“言語ゲーム”だと考えたが、彼によれば、(可算)無限は言うに及ばず、はっきり見てとれないほど多くあるものの個数を考えるなど、錯誤以外の何ものでもないはずだ。^{*15} その個数は、数を数えるという別種のゲームのなかで現前してくるだけなのである(Wittgenstein〔1930=1978:188f, 203f〕など)。

【16】 しかし無限を批判する厳密有限主義のような試みが、フィクションからまったく自由かという点、問題がのこる。日常の思考や“言語ゲーム”でも「すべての」(全称)とか「でない」(否定)とかの論理操作が行なわれるからである。

日常語では「すべての～」、「～でない」などとよく言う。(これらは \forall 、 \neg などの論理

操作にあたらう。)要素の特定された有限集合についてだけ、上の言い方をするわけではない。むしろ通常は未経験の、それゆえ特定されない対象が念頭にある。もし厳密有限主義が無限の理想的性格を批判するのなら、日常の思考や語法のもつこうした理想的な性格も問題にすべきだろう。そこでは暗黙のうちに、無限集合が想定されているから。^{*16}

人間の思惟はそもそもフィクションを排除できない、と思いたいべきである。人間の限られた思惟がその外に広がる対象的な世界をつかむのは、並大抵でない。そこで組織だった思惟が最低限行なうのは、推論(ないし予期)——事象の生起に先立って予め思惟による描像を与えること——であるが、すでにこの段階で全称や否定の操作が介在する。これは経験からの帰納に還元されない理想的な操作であり、そのいみでフィクションにつらなる。およそ人間の思惟が言語、記号、その他の諸形式とともに営まれるのは、こうした必然による。

形式主義が確保しようとした無矛盾は眼前のものでないことに、注意しよう。矛盾($K \vdash A$ かつ $K \vdash \neg A$)はたしかに、眼前にある2つの証明である。これに対し無矛盾(Consis(K))とは、上のような命題Aが決して存在しないこと、すなわちフィクションにつらなることからの確認である。形式的体系は、思惟の用具(もしくは舞台)であるあいだは矛盾を現前させておらず、その限りで無矛盾を現前させているはずだ。無矛盾を証明というかたちで眼前にもたらさずとも、形式的体系の有用性が減じるわけではない。

形式主義の証明論は、どこか方針が誤っていたのではないか?

【17】 ある形式的体系を支配する規則をひとつのこらずその体系のなかで明示してしまう

ことはできない、という基本的事実がまずある。

意味のある記号の体系、たとえば英語を例にとろう。英語を解する人々は、英語が暗号でない^{*17}と信じている。暗号——意味を隠した記号の体系——は、変換にもとづく2次的な体系である。暗号は、暗号でない1次的な記号体系(英語)に言及することで意味をえ、言及(対応)の規則を秘匿することで意味を隠す。そのためかえって、暗号解読の完全なコードブックが存在できる。これに対して英語の意味は隠されていない。それは記号の用法(規則)とともにある。まさにこの事情で、英語の規則のすべてを英語で表現することはできない。(英語で書かれた英語の文法書というものがありうる。しかし、英語を解さないならどうやってその文法書を読めばよいのか?)

人間なら少なくとも1つ、1次的な記号の体系を¹しているはずである。そしてその用法(規則)のもっとも肝腎な部分は、それを行使する主体=身体²の側に具わるものである。(したがってどんな記号の体系でも、突然その用法(規則)が健忘されてしまい理解不能となる危険から、原理的に守られていない。)

意味を欠いた形式的体系にしても同様である。それを成立させる推論の規則は、記号が恒常的な同一の意味をもつはずだったのと同じく、恒常的な同一の範式を与える。これが範式である事実は、主体=身体²がその都度この推論の規則に服するというできごとのなかで、くりかえし成立していだけである。三段論法の範式などは、こうした規則を外的に定式化したものだ。こうした記号的な表現をえて、規則は、人々を¹と同様にとらえる<規範>としてはたらきはじめる。

およそ形式的体系は、<規範>に浸されてはじめて存在できる。<規範>に支えられるとき

記号のシステムや証明は“理解”される。証明という制度に対する信頼は、このようなく規範>を受け入れ自明の秩序とみなす人々のあいだに生まれる。形式的体系を支えるこの種<規範>に言及することは、その形式的体系にはできない。

以上のように、形式主義による証明論の動機は批判の余地あるものだ。しかし Gödel の定理は現に証明され、眼前にある。この結果は別途に検討すべきことがらである。

【18】 厳密有限主義や直観主義の立場にたつなら結論ははっきりしている。Gödel の与えた証明は、証明とはみとめがたく、定理を与えると考えられない。しかしわれわれは、数学という作業からフィクションを追放すべきだとは考えなかった。よって結論はまた異なったものとなる。

実は Gödel [1931] の定理 (の解釈) は必ずしも論理式の“内容”から絶縁していない、と考^{*18}えてみよう。証明論は証明に言及する。そして、言及するという事実それ自体が (一般に) 言及される内容をつくりだしてしまう。そこからこの定理の証明論上の含意——形式的体系が自らの根拠を確認できないことの証明——が浮かびあがってくるとみえる。

形式主義の本義にたちもどれば、証明論を含むすべての形式的体系を、内容の汚染から防護せねばならない。それにはまず、論理式自体をその意味内容から峻別し、後者を形式的体系から排除することである。こうして記号とその用法 (規則) だけがのこる。不完全性定理に関してならまず、“なるほど証明は眼前にある、しかしその含意が現前しているわけではない”と言えよ。

【19】 第 1 不完全性定理——この定理 (の証明) は確かに眼前にある。この事実は証明を、

逐行に追うことで確認できる。どんな証明も<規範>に浸され<規範>とともにあるから、単純に斥けることはできない。だが形式主義に則って言えるのはここまで、つまり決定不能な論理式 U_K の存在まで、だろう。その先、たとえば【6】に紹介した、 U_K が「本来は真か偽のいずれかに定まっている」というこの定理の通用の理解は、すでに内容的である。 U_K は (10・4) 式を引照して、よく“それ自身が証明できないことを言明する論理式”と解される。

U_K の内容が“ U_K は証明できない”だと考えると、実際 U_K は証明できないわけだから、 U_K は“真”とみえる。こうして“真であるが証明できない論理式” U_K という含意が生じる。しかし (10・4) は $\neg \text{Bew}_K(\ulcorner U_K \urcorner)$ が証明できる時 U_K も証明できること、およびその逆、をいうだけの論理式である。その両辺は、異なる論理式であり、<この同値式の両辺の論理式は同一の内容を意味すると考えてよい> (前原 [1977:134]) のでなく、そう考^{*19}える理由はないのである。

(第 2 不完全性定理では形式と内容の落差がいちだんと顕著である。ここでも第 1 定理のときと同様の問題が露わとなるが、前原 [1981] に委ねておこう。)

【20】 形式主義の理想 (内容からまったく絶縁した形式的体系) を想い描こう。体系は完結を志向するが、そこにフィクションが招きよせられる。自然数に関わる議論を代数体論として閉じようとはかるなら、これはやむをえない。

実行された証明ならどれも<規範>に浸されていよう。しかし<規範>はそれを越えて拡がらない。なぜなら<規範>は身体性をはなれて外へ、身体の所作がたどる記号列 (=証明) の外へ出ることができないからである。こうして形式的体系の全体が<規範>で充ちているわけ

ではない。形式的体系は、前提 (公理) から派生するごく小部分で証明を実行するものにすぎず、その外に拡がるのは根拠をもたない類推や一般化である。^{*21}

形式的体系の無矛盾性 (前提相互の理念的な整合性) は、つねにこうしたフィクションの側にある。体系は、無限の理念と具体的な無限の概念 (=社会規範もしくは制度) とを受容するなら、前提相互の整合性が現出する (証明が形式的体系の内部を埋めつくす) ことを断念することになる。(この断念を証明論は回収しない。)

こうしてわれわれは、数学の普遍性について次の見通しをえた: この形式的な体系を、証明に関わる<規範>、体系にまつわるフィクション、の 2 つが支えている。思惟が純粋化して自らを秩序づける時、この<規範>と共振するが、そのことを通じて自らの上にフィクションをもひきうけるようになる。しかるに普遍の名に値するのは、フィクションとしての社会規範ないし制度ではなく、この<規範>のみなのだ。

【21】 社会形象としての数学に着目すべきだ。本論は形式主義の証明論と Gödel の定理を材料にしたが、これは後続する作業のほんの端初となる。

数学や論理は人間のしる数少ない共通形式であって、社会 (科) 学固有の対象である。言語や他の記号現象と同じく、身体の編成原理をなし、社会の可能根拠を与えるものだ。わけてもこの現象は、よく<規範>に浸され、隅々までみやすく形式化されている。この数学という社会現象の実質を解説しおおせるなら、社会という装置の実際もよく視えはじめるにちがいない。

注

m * n 【m】節にある、通し番号 n の注。

4 * 1 点・直線・平面とよばれるものをテーブ

ル・椅子・ビールジョッキとよびかえてみよ、というのが彼らの有名なスローガンである (Reid [1970 =1972:114])。)

5 * 2 <構造>人類学は例外を否定し、思惟にかかわる操作の実質的な普遍性を主張する果敢な試みである。

7 * 3 ひとつはここで、証明論という企図のもつ特異な様相に目を向けるべきであろう: 証明論の動機は、確実すぎるほど確実だった証明という操作に対する、執念ぶかい不信の念であった。しかるに当の証明論はまたしても、公理主義的な構成をとり、証明という作業への率直な信頼に裏打ちされている。これは逆理とみえる。証明論が遂行する証明と証明論が対象とする証明とは、互いにどんな関係にあるのか? もしもこの 2 つの証明が別個のものなら、証明論が遂行する証明への信頼がどこから備給されるかは、未解決のままに残ろう。またもし両者が同一のものなら、証明論の超数学的な特権がどこに由来するのか見極める必要が生じる。

7 * 4 これに対して、Brouwer らの直観主義は、同じく証明を批判の対象としながら、形式主義から分岐をみせている。彼らは、<証明はすべて“明晰に知覚可能 (anschaulich überblickbar)” なる有限的性格のものでなければならない> (Wilder [1965=1969:361]) と信じ、ごく限定された手続きにより、既存の数学の内容を再現すべく努力した。そしてこの手続きへの信頼は、証明をはなれたなにか数学以前のな実体——直観——によって備給されるとされる。

8 * 5 Gödel [1931:17] の注 1) は、PM (プリンキピア・マテマティカ) の公理系に選択公理などを追加する旨のべているが、この公理は N に含まれる。公理系を別様へ選べば Gödel の証明はそのままでは転用できない、しかし、その大筋は、興味あるすべての数学的对象 (自然数論を含む体系) に有効である。

8*6 (原始)帰納的関数とは要するに、自然数0と関数 $x+1$ をもとにし、独立変数の追加や順序変更を認めた上で、代入と関数の帰納的定義を繰り返して適用することによって得られる関数のこと(前原[1977:165])である。詳しくはGödel[1931:23f]、(一般)帰納的関数については前原[1977:164f]をみよ。

8*7 任意に与えられた論理式の集合 K の元をすべて公理と考えたときの証明を、 K -証明という。“ x は或る K -証明のゲーデル数で、その K -証明の最後の論理式のゲーデル数が y である”という関係を、 $x B_K y$ と表わす(前原[1977:124])。関係 $(\exists m)(m B_K x)$ を $Bew_K(x)$ とあらわし、“ x は K から証明できる”と読む。すなわち、 $K \vdash A$ と $Bew_K(A)$ とは同じことである。 K が空集合のとき、以上の添字 K を省く。

9*8 直観的な自然数 $0, 1, \dots, m, \dots$ やその関係 $R(x, y)$ などに対応する対象式 $0, 1, \dots, m, \dots$ や論理式をあらわすのに、 $0, 1, \dots, m, \dots$ や $R(x, y)$ などと表記する。また、形式的体系における論理記号 $\neg, \rightarrow, \rightleftharpoons, \vee, \wedge, \forall, \exists$ と区別するため、内容的な命題を表わす論理記号 $\neg, =, =, \text{or}, \&, (\forall), (\exists)$ を用いる。

10*9 この U_K は[6]にいう命題 A と同じものだが、公理系 K の選択に依存して定まることを示すため表記を変えてある。

11*10 Gödel[1931]のもとの証明では、“強い意味で表現可能”のかわりに“原始帰納的”となっている。 K が空集合か有限集合ならば、強い意味で表現可能(定義は複雑なので省略)である。

12*11 Gödel本人は必ずしもそう考えていない(Gödel[1931:197])。それに彼の仕事はかえってその後の数学基礎論や計算理論のさきがけともなっている。しかし事態はむしろ深刻に受けとるべきものだ。

13*12 たとえば柄谷[1981]。彼の議論は性急

であり、彼のいうゲーデル問題は内容が判然としな

14*13 宇宙は果てしないが閉じており、有限である。およそ存在するものは有限である。これに対し、無限をやる数学は理念的であって、実在世界を超えていている。

15*14 無限を含む数学(たとえば実数論)が経験的な実在世界との対応を欠くフィクションなのはいいとして、それならなぜ、数量モデルを説明装置とする科学理論が経験的に妥当なのか? ホイントは、経験的な事象を観測し1次的なデータに変換する段階で数量化が施されていることだろう。このデータへの変換は、フィクション=制度を部品とする(理論上の)測定装置によって遂行される。このデータが数量モデルで説明されても、それが無限の経験的ないみを確認したわけではない。

15*15 思うに、無限という表象はつぎのようにして生じよう:まず、数えるという所作は、常同的な反復を含んでいる。いま注意が、数えられる個物から数える所作にうつるとき、数える所作の常同性を包む回帰的なループができる。この注意のループのなかで、数える所作は、数えおわらないという事実とともにあるしかない。作動する身体の現在をつかもうとする身体の作動のなかに、こうして無限の表象が宿る。

16*16 直観主義はこの文脈から古典論理に異をと見え、無限集合に関する排中律の成立をみとめない。しかしこの理路は偏頗であって、数学をより適切に基礎づけるわけでもない。直観論理をはじめとする非古典論理の諸型と本性については、改めて考察しよう。

17*17 コード化、解説など暗号操作に範をとった機能的言語論の言語理解は、このいみから少し問題がある。

18*18 前原[1981]に類似の示唆がみえる。

19*19 $Bew_K(U_K^q)$ は、数値別の表現可能性

などによって、 $K \vdash U_K$ と論理的に結びついている。この関係は、証明のなかに現前しており、否認できない。しかしこれを、証明論の動機にしたがって証明に(自己)言及するものと解するときには、そこに眼前しない含意が内容として付着したことになる。

証明論が内容に汚染されてしかいみをもたないとすると、証明論は形式主義に不健康をもたらす。これは、計算理論の健全さと比較して、対照的であろう。計算理論は、ある計算を実行する装置を想定し、

その性能を研究する。その際、計算装置(理論の対象)と計算理論の本体とは、別々の形式的体系であり、明瞭に区別されている。

19*20 簡単に言えば、論理式 $\text{Cons}(K)$ (正確には(12.1)の右辺)と、“形式的体系の無矛盾”というフィクションにつらなる事態とが、内容的にしかつながらないこと。

20*21 たとえば(10.4)にいう決定不能命題の存在自体、対角線論法(制度としての無限)にもとづくフィクションの如きものではある。

文 献

- Davis, Martin 1958 Computability and Unsolvability, McGraw-Hill. =1966 坂辺茂・赤根也訳, 『計算の理論』, 岩波書店。
- Gödel, Kurt 1931 "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", Monatshefte für Mathematik und Physik 38:173-198.
- 橋爪大三郎 1979 「言語ゲーム論考」, (未発表)。
- 前原 昭二 1977 「数学基礎論入門」(基礎数学シリーズ26), 朝倉書店。
1981 「ゲーデルの不完全性定理の教えるもの」, 『理想』576:42-50。
- 柄谷 行人 1981 「形式化の諸問題」, 『現代思想』9-10:140-158。
- Kline, Morris 1953 Mathematics in Western Culture, Oxford Univ. Press. =1977/1978 中山茂訳, 『数学の文化史(上)(下)』, 社会思想社。
- Reid, Constance 1970 Hilbert, Springer Vlg. =1972 堀永健一訳, 『ヒルベルト 現代数学の巨匠』, 岩波書店。
- Рузавин, Г.И. (Ruzabin, G.I.) 1968 О Природе Математического Знания, Издательство. =1977 山崎三郎・栗岡泰光訳, 『数学論 数学的認識の本性』, 岩波書店。
- 内田 隆三 1981 「形式化を外在性について アルシヴィストの眼差」, (未発表)。
- Wilder, Raymond L. 1965 Introduction to the Foundations of Mathematics (Second Edition), John Wiley and Sons. =1969 吉田洋一訳, 『数学基礎論序説』, 培風館。
- Wittgenstein, Ludwig 1930 Philosophische Bemerkungen (MS) → 1964 Basil Blackwell. =1978 奥雅博訳, 『哲学的考察』(ウィットゲンシュタイン全集2), 大修館書店。

Where Does NORM Lie In Mathematics?

Daisaburo HASHIZUME

Mathematics is a mental activity regulated by a series of rules, which form an abstract order of mathematics. This order belongs to "fait social" that stands outside every thinking of individuals. It's a social figure showing its historical development especially in modern times.

Why does mathematics regulate our mind? Is it universal? It is vital how to answer these questions, when one tries to cut deep into the very nature of mathematics. Dealing with the works of Formalism and Gödel's theorems, the author states here that we should find NORM at the center of mathematics. This paper will be a preview of following ones concerning the sociological foundations of mathematics.

(はしづめ だいさぶろう)